ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ

Методические указания
для аудиторной и самостоятельной работы
студентов, обучающихся по специальности
7-07-0732-01 Строительство зданий и сооружений

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее интересных разделов прикладной математики является теория приближения (аппроксимации) функций. Основоположником теории аппроксимации функций является великий русский математик Пафнутий Львович Чебышев (1821–1894).

Под приближением функции понимают замену по определенному правилу одной функции – *аппроксимируемой* $f(x)$, другой – $\tau(x)$, близкой к исходной в том или ином смысле. Функция $\tau(x)$ при этом называется *аппроксимирующей функцией*. В ситуации, когда аппроксимирующая функция ищется так, чтобы ее значения совпадали со значениями аппроксимируемой функции в заданном наборе точек, процесс отыскания функции будем называют *интерполяцией*. Если же по набору точек следует восстановить приближенные значения функции вне заданного интервала, то данный процесс называют *экстраполяцией* функций.

Практическая необходимость в такой замене возникает в самых различных ситуациях, когда данную функцию необходимо заменить более простой и удобной для вычислений, восстановить функциональную зависимость по экспериментальным данным и других подобных задач.

Данные методические указания представляют собой руководство по изучению основных математических методов приближения функций с помощью программных средств ЭВМ и рекомендуются для студентов мелиоративно-строительного факультета специальности 07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений». Кроме этого, они могут быть использованы магистрантами и аспирантами в качестве пособия для самостоятельного изучения и закрепления материала по рассматриваемой теме с последующим применением приведенных методов для решения конкретных производственных задач.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы [Электронный ресурс] / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – Электрон. текстовые данные. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. – 639 с. – Режим доступа: https://csc-knu.github.io/numerical-analysis/books/bahvalov-zhidkov-kobelkov-2015.pdf.

2. Зенков, А. В. Численные методы : учеб. пособие / А. В. Зенков. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2016. – 124 с.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФУНКЦИИ

Интерполирование первоначально рассматривалось как нахождение промежуточных значений функции по известным значениям заданных узлов (термин *интерполирование* означает “чтение между строк”).

Интерполирование – задача обратная табулированию. При табулировании по аналитически заданной функции находят значения в узлах, а при интерполировании – по узловым значениям находят промежуточные значения функции.

x	x_1	x_2	…	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	…	$f(x_n)$

С геометрической точки зрения это означает, что между интерполяционными узлами можно провести линию, соответствующую выбранной функции.

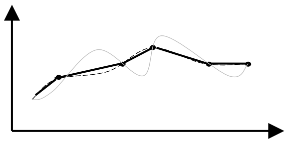


Рис. 1.

Основной задачей интерполирования является подбор функции, приближающей ее значения к значениям в заданных узлах. Из рис. 1 следует, что выбор такой функции неоднозначен. А такие задачи решать сложно.

Однако если на искомую функцию наложить дополнительные ограничения, то в этом случае задача может быть решена.

Задача интерполяции состоит в следующем: заданы точки $(x_i;\ y_i)$, $i=\overline{1,n}$, требуется найти функцию $\tau(x)$, которая проходит через эти точки (рис. 1), т.е.

$$\tau(x_i)= y_i, \qquad i=\overline{1,n}. \tag{1}$$

Точки (x_i, y_i) называют узлами интерполяции, а функцию $\tau(x)$ – интерполирующей функцией, или интерполянтом.

Как правило, в качестве интерполирующей функции используют обобщенный многочлен $\tau(x)$ на системе линейно-независимых функций.

Линейно-независимыми называются функции, линейная комбинация которых $\lambda_0\varphi_0(x)+\lambda_1\varphi_1(x)+\ldots+\lambda_m\varphi_m(x)$ равна 0, в случае, когда все $\lambda_k = 0$ ($k=\overline{0,m}$).

Если $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_m(x)$ – система линейно-независимых функций, то обобщенный многочлен $\tau(x)$ на системе линейно-независимых функций примет вид

$$\tau(x) = \lambda_0\varphi_0(x) + \lambda_1\varphi_1(x) + ... + \lambda_m\varphi_m(x) .$$

Совокупность функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_m(x)$ называется системой Чебышева на отрезке $[a; b]$, если любой обобщенный многочлен по этой системе, у которого хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля, имеет на данном отрезке не более n корней.

Справедливо следующее утверждение: для любого n + 1 узла x_0, x_1,…, x_n на $[a; b]$ существует единственный обобщенный интерполяционный многочлен $\tau(x) = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k \varphi_k(x)$ тогда и только тогда, когда система функций $\varphi_k(x)$, $k=\overline{0,m}$ являлась системой Чебышева на данном промежутке.

Пусть интерполирующая функция имеет следующий вид:

$$\tau(x) = \tau(\vec{C}, x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + ... + c_m\varphi_m(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k\varphi_k(x), \qquad (2)$$

где $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, …, $\varphi_m(x)$ – базисные функции.

Используя условие (1) и выражение (2), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \tau(\vec{C}, x_0) = c_0\varphi_0(x_0) + c_1\varphi_1(x_0) + ... + c_m\varphi_m(x_0) = y_0, \\ \tau(\vec{C}, x_1) = c_0\varphi_0(x_1) + c_1\varphi_1(x_1) + ... + c_m\varphi_m(x_1) = y_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tau(\vec{C}, x_n) = c_0\varphi_0(x_n) + c_1\varphi_1(x_n) + ... + c_m\varphi_m(x_n) = y_n. \end{cases} \qquad (3)$$

Система (3) будет иметь единственное решение в случае когда:

1) число точек $(x_i; y_i)$, $i = \overline{0, n}$ равно числу коэффициентов c_k, $k = \overline{0,m}$;

2) система уравнений (3) является невырожденной, т. е. определитель системы $\Delta \neq 0$.

Таким образом, если выполняются вышеуказанные условия, то через точки $(x_i; y_i)$ проходит единственная функция $\tau(\vec{C}, x) = \sum_{k=0}^{m} c_k\varphi_k(x)$.

Вид обобщенного многочлена $\tau(x)$ определяет способ интерполяции. Существуют три основные группы функций, широко применяемых в численном анализе. Первая включает в себя линейные комбинации функций 1, x, x^2, …, x^n, что совпадает с классом всех многочленов степени n. Вторую образуют функции 1, $\sin(x)$, $\cos(x)$,…, $\sin(nx)$, $\cos(nx)$. Этот класс имеет отношение к рядам Фурье и интегралу Фурье. Третья образуется функциями $e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, ..., e^{a_n x}$. Эти функции встречаются в реальных ситуациях при решении задач накопления и распада. Если в качестве системы линейно-независимых функций в обобщенный многочлен входят степенные функции $\{1, x^2, ..., x^n\}$ –интерполяцию называют алгебраической; $\{\sin(x), \cos(x), ..., \sin(nx), \cos(nx)\}$ – тригонометрической; $\{ e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, ..., e^{a_n x} \}$ – экспоненциальной.

2. АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ

На практике в качестве интерполирующей функции $\tau(x)$ часто используются алгебраические полиномы, так как их легко вычислять, дифференцировать и интегрировать. При этом интерполяция носит название *алгебраической*.

Для однозначности решения этой задачи потребуем, чтобы искомой функцией был многочлен степени на единицу меньшей, чем число заданных узлов, и в узловых точках значения совпадали. В этом случае базисными функциями будут:

$\varphi_0(x) = x^0 = 1$, $\varphi_1(x) = x^1 = x$, $\varphi_2(x) = x^2$, …, $\varphi_{n-1}(x) = x^{n-1}$, $\varphi_n(x) = x^n$,

а интерполяционный многочлен будет иметь вид

$$\tau(x) = \mathrm{L}_n(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \ldots + c_n \cdot x^n. \qquad (4)$$

Существуют различные подходы к определению неизвестных параметров интерполяционного многочлена. Основные из них:

1) с помощью составления системы линейных уравнений;
2) по формуле Лагранжа;
3) по формулам Ньютона.

2.1. Определение параметров алгебраического интерполирования с помощью составления системы линейных уравнений

Согласно основному интерполяционному тождеству (1), подставив в функцию (4) узловые значения, получим систему уравнений

$$\begin{cases} c_0 + c_1 x_0 + c_2 x_0^2 + \ldots + c_n x_0^n = y_0, \\ c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + \ldots + c_n x_1^n = y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ c_0 + c_1 x_n + c_2 x_n^2 + \ldots + c_n x_n^n = y_n. \end{cases} \qquad (5)$$

В матричной форме эта система будет выглядеть как $A \cdot C = B$,

$$\text{где } A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \text{ – матрица Ван дер Монда;}$$

$$B = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}; \; C = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Решением системы (5) будет C – вектор искомых коэффициентов многочлена. Так как определитель матрицы Ван дер Монда всегда отличен от нуля (при $x_i \neq x_j$), то система (5) будет иметь единственное решение. Его можно найти матричным способом: $C = A^{-1} \cdot B$.

Таким образом, через заданные на интервале $[a; b]$ точки $(x_i; y_i)$, $i = \overline{0,n}$ всегда можно провести единственный интерполяционный многочлен $\tau_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$, коэффициенты которого находятся в результате решения системы (5).

Пример. Определить интерполяционный многочлен для функции, заданной таблично:

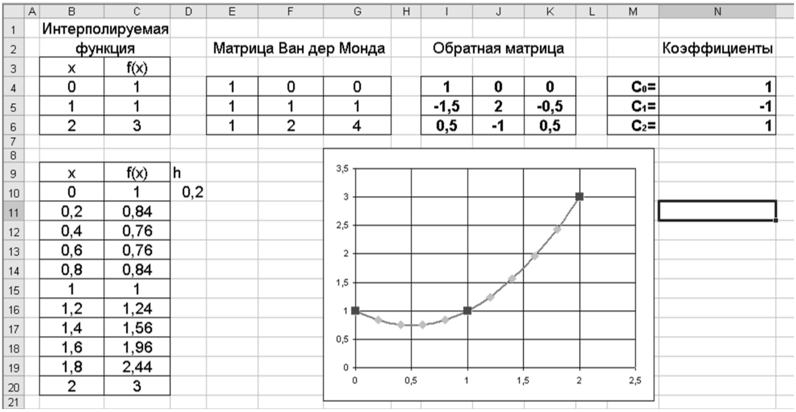
x	0	1	2
$f(x)$	1	1	3

Решение. Так как функция, заданная таблично, имеет три узловые точки, то степень интерполяционного многочлена будет равна $n - 1 = 3 - 1 = 2$. А значит, его мы можем записать в общем виде как $\tau_2(x) = c_0 + c_1 x^1 + c_2 x^2$. Согласно основному интерполяционному тождеству, подставив узловые точки в многочлен, получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0^2 = 1, \\ c_0 + c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1^2 = 1, \\ c_0 + c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 2^2 = 3. \end{cases}$$

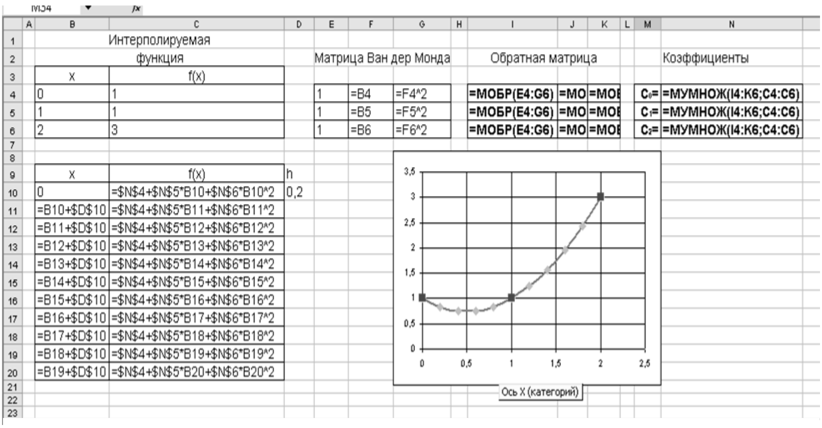
Решение данной системы удобно выполнять в математических пакетах Microsoft Excel или MathCAD.

Реализация алгебраической интерполяции в Microsoft Excel показана на рис. 2, 3.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		Интерполируемая												
2		функция			Матрица Ван дер Монда				Обратная матрица					Коэффициенты
3		x	f(x)											
4		0	1		1	0	0		1	0	0		C_0=	1
5		1	1		1	1	1		-1,5	2	-0,5		C_1=	-1
6		2	3		1	2	4		0,5	-1	0,5		C_2=	1
7														
8														
9		x	f(x)	h										
10		0	1	0,2										
11		0,2	0,84											
12		0,4	0,76											
13		0,6	0,76											
14		0,8	0,84											
15		1	1											
16		1,2	1,24											
17		1,4	1,56											
18		1,6	1,96											
19		1,8	2,44											
20		2	3											
21														

Рис. 2. Нахождение параметров алгебраической интерполяции в Microsoft Excel.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		Интерполируемая												
2		функция			Матрица Ван дер Монда				Обратная матрица					Коэффициенты
3		x	f(x)											
4		0	1		1	=B4	=F4^2		=МОБР(E4:G6)	=МО	=МОБ		C_0=	=МУМНОЖ(I4:K6;C4:C6)
5		1	1		1	=B5	=F5^2		=МОБР(E4:G6)	=МО	=МОБ		C_1=	=МУМНОЖ(I4:K6;C4:C6)
6		2	3		1	=B6	=F6^2		=МОБР(E4:G6)	=МО	=МОБ		C_2=	=МУМНОЖ(I4:K6;C4:C6)
7														
8														
9		x	f(x)	h										
10		0	=\$N\$4+\$N\$5*B10+\$N\$6*B10^2	0,2										
11		=B10+\$D\$10	=\$N\$4+\$N\$5*B11+\$N\$6*B11^2											
12		=B11+\$D\$10	=\$N\$4+\$N\$5*B12+\$N\$6*B12^2											
13		=B12+\$D\$10	=\$N\$4+\$N\$5*B13+\$N\$6*B13^2											
14		=B13+\$D\$10	=\$N\$4+\$N\$5*B14+\$N\$6*B14^2											
15		=B14+\$D\$10	=\$N\$4+\$N\$5*B15+\$N\$6*B15^2											
16		=B15+\$D\$10	=\$N\$4+\$N\$5*B16+\$N\$6*B16^2											
17		=B16+\$D\$10	=\$N\$4+\$N\$5*B17+\$N\$6*B17^2											
18		=B17+\$D\$10	=\$N\$4+\$N\$5*B18+\$N\$6*B18^2											
19		=B18+\$D\$10	=\$N\$4+\$N\$5*B19+\$N\$6*B19^2											
20		=B19+\$D\$10	=\$N\$4+\$N\$5*B20+\$N\$6*B20^2											
21														
22														
23														

Рис. 3. Макет расчетной таблицы.

Реализация алгебраического интерполирования в MathCAD показана на рис. 4.

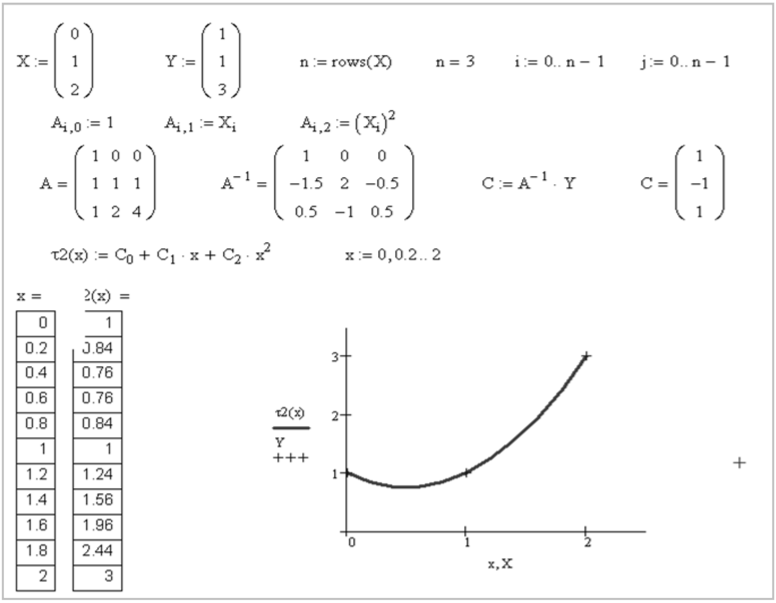


Рис. 4. Нахождение параметров алгебраической интерполяции MathCAD.

Значит, искомый многочлен будет иметь вид $\tau_2(x) = 1 - x + x^2$.

2.2. Алгебраическое интерполирование с помощью формулы Лагранжа

Интерполирование с помощью систем линейных уравнений является громоздким и зачастую неоправданным. Существует общий подход к построению интерполяционных многочленов. Подберем такую функцию $F(x)$, которая в узловом значении x_0 равна 1, а в остальных узлах равна 0, т. е.

$$F(x_0) = 1,\ F(x_i) = 0,\ x_i \neq x_0.$$

Такую функцию мы можем представить в следующем виде:

$$F(x) = \frac{(x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot\ldots\cdot(x - x_{n-1})\cdot(x - x_n)}{(x_0 - x_1)\cdot(x_0 - x_2)\cdot\ldots\cdot(x_0 - x_{n-1})\cdot(x_0 - x_n)}.$$

Построим многочлен, который в точке x_0 принимает значение $f(x_0)$, а в остальных узловых точках обращается в 0. Он будет иметь вид

$$F_0(x)=\frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_0-x_n)}\cdot f(x_0).$$

Аналогичным образом определяется многочлен, принимающий значение $f(x_1)$ в точке x_1, а в остальных узловых точках равный 0

$$F_1(x)=\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_1-x_n)}\cdot f(x_1).$$

Обобщив результаты, можно записать подобные функции для всех узловых точек, т.е. функции вида

$$F_j(x)=\begin{cases} f(x_j), \text{ если } x=x_j, \\ 0, \quad \text{ если } x\neq x_j. \end{cases}$$

Они будут выглядеть так:

$$F_j(x)=\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{j-1})\cdot(x+x_{j+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdot(x_j-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_j-x_{j-1})\cdot(x_j-x_{j+1})\cdot\ldots\cdot(x_j-x_n)}f(x_j).$$

Тогда интерполяционный многочлен может быть записан в виде суммы представленных выше многочленов и называется *интерполяционной формулой Лагранжа*

$$\tau_n(x)=W(x)\cdot\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{(x-x_i)\cdot W'(x_i)}, \qquad (6)$$

где $W(x)=\prod_{j=0}^{n} x-x_j;$

$$W'(x_i)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} x_i-x_j.$$

Полином Лагранжа удобно использовать, если требуется находить приближения различных функций, заданных в одних и тех же узловых точках. В таких случаях можно предварительно вычислить коэффициенты Лагранжа по формуле

$$\frac{W(x)}{(x-x_i)\cdot W'(x_i)},\ i=\overline{0,n}.$$

Пример. Составить интерполяционный многочлен для следующих функций, заданных таблично, построить их графики:

x	0	1	2
y	1	1	3

x	0	1	2
y	–5	1,45	3,76

Решение. Реализацию формулы Лагранжа для интерполяции функций в Excel покажем на рис. 5, 6.

	A	B	C	D	E	F	G
1		**Табличные функции**					
2							
3		**x**	**0**	**1**	**2**		
4		**f1**	**1**	**1**	**3**		
5		**f2**	-5	1,45	3,8		
6							
7			**Разности**				
8			**x0**	**x1**	**x2**		
9	**x0**	**0**		-1	-2	**2**	
10	**x1**	**1**	1		-1	**-1**	$W'(x_i)$
11	**x2**	**2**	2	1		**2**	
12							
13	**h**	**x**	**f1(x)**	**f2(x)**			
14	0	0	1	-5			
15		0,3	0,8	-3			
16		0,5	0,8	-1,3			
17		0,8	0,8	0,23			
18		1	1	1,45			
19		1,3	1,3	2,42			
20		1,5	1,8	3,12			
21		1,8	2,3	3,57			
22		2	3	3,76			

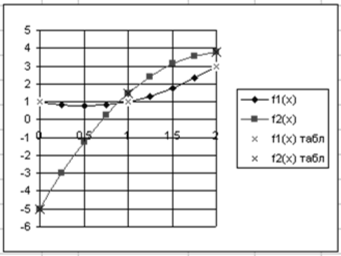


Рис. 5. Интерполирование с помощью формулы Лагранжа
в Microsoft Excel.

	A	B	C	D	E	F
2						
3		x	0	1	2	
4		f1	1	1	3	
5		f2	-5	1,45	3,76	
6						
7			**Разности**			
8			**x0**	**x1**	**x2**	
9	**x0**	0		=$B9-D$3	=$B9-E$3	**=ПРОИЗВЕД(C9:E9)**
10	**x1**	1	=$B10-C$3		=$B10-E$3	**=ПРОИЗВЕД(C10:E10)**
11	**x2**	2	=$B11-C$3	=$B11-D$3		**=ПРОИЗВЕД(C11:E11)**
12						
13	**h**	x	f1(x)	f2(x)		
14	0,25	0	=(B14-$D$3)*(B14-$E$3)*$C$4/$F$9+(B14-$C$3)*(B14-$E$3)*$D$4/$F$10+(B14-$C$3)*(B14-$D$3)*$E$4/$F	=(B14-D		
15		=B14+$A$14	=(B15-$D$3)*(B15-$E$3)*$C$4/$F$9+(B15-$C$3)*(B15-$E$3)*$D$4/$F$10+(B15-$C$3)*(B15-$D$3)*$E$4/$F	=(B15-D		
16		=B15+$A$14	=(B16-$D$3)*(B16-$E$3)*$C$4/$F$9+(B16-$C$3)*(B16-$E$3)*$D$4/$F$10+(B16-$C$3)*(B16-$D$3)*$E$4/$F	=(B16-D		
17		=B16+$A$14	=(B17-$D$3)*(B17-$E$3)*$C$4/$F$9+(B17-$C$3)*(B17-$E$3)*$D$4/$F$10+(B17-$C$3)*(B17-$D$3)*$E$4/$F	=(B17-D		
18		=B17+$A$14	=(B18-$D$3)*(B18-$E$3)*$C$4/$F$9+(B18-$C$3)*(B18-$E$3)*$D$4/$F$10+(B18-$C$3)*(B18-$D$3)*$E$4/$F	=(B18-D		
19		=B18+$A$14	=(B19-$D$3)*(B19-$E$3)*$C$4/$F$9+(B19-$C$3)*(B19-$E$3)*$D$4/$F$10+(B19-$C$3)*(B19-$D$3)*$E$4/$F	=(B19-D		
20		=B19+$A$14	=(B20-$D$3)*(B20-$E$3)*$C$4/$F$9+(B20-$C$3)*(B20-$E$3)*$D$4/$F$10+(B20-$C$3)*(B20-$D$3)*$E$4/$F	=(B20-D		
21		=B20+$A$14	=(B21-$D$3)*(B21-$E$3)*$C$4/$F$9+(B21-$C$3)*(B21-$E$3)*$D$4/$F$10+(B21-$C$3)*(B21-$D$3)*$E$4/$F	=(B21-D		
22		=B21+$A$14	=(B22-$D$3)*(B22-$E$3)*$C$4/$F$9+(B22-$C$3)*(B22-$E$3)*$D$4/$F$10+(B22-$C$3)*(B22-$D$3)*$E$4/$F	=(B22-D		
23						

Рис. 6. Макет расчетной таблицы в Microsoft Excel.

Реализацию формулы Лагранжа для интерполяции функций в MathCAD покажем на рис. 7.

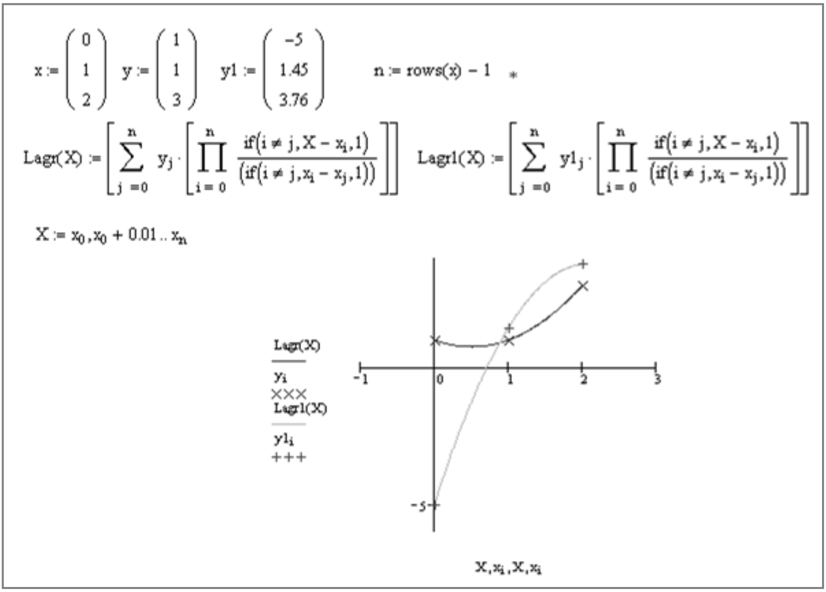


Рис. 7. Реализация интерполяционной формулы Лагранжа в MathCAD.

Частный случай формулы Лагранжа. Пусть на отрезке $[a;\, b]$ задана система равноотстоящих узлов $x_0,\ x_1,\ ...,\ x_n,$ которыми отрезок делится на n равных частей: $x_i - x_{i-1} = h = \text{const},$ где $i = \overline{1, n}.$

В этом случае интерполяционный многочлен Лагранжа строится на равноотстоящих узлах и имеет более удобный вид. Преобразуем формулу, введя новую переменную $t = \dfrac{(x - x_0)}{h}$, где h = $\dfrac{b-a}{n}$. Так как для равностоящих узлов $x_{i+1} = x_i + h$, то можем записать:

$x = h \cdot t + x_0 \Rightarrow x - x_0 = h \cdot t;$

$x - x_1 = h \cdot t + x_0 - x_0 - h = (t - 1) \cdot h \Rightarrow x - x_1 = (t-1) \cdot h;$

$x - x_2 = x - x_1 - h = (t - 1) \cdot h - h = x - x_2 = (t - 2) \cdot h \Rightarrow x - x_2 = (t - 2) \cdot h.$

Обобщив алгоритм, можем записать, что

$$x - x_i = (t - i) \cdot h. \qquad (7)$$

Используя равенство (8), выражение

$$W(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

перепишем в виде

$$W(x) = h^{n+1} t \cdot (t-1) \cdot (t-2) \cdot \ldots \cdot (t-n). \qquad (8)$$

Учитывая, что $x_i = x_0 + ih,\ i = \overline{0,n},$ найдем:

$$x_i - x_0 = h \cdot i;$$

$$x_i - x_1 = (x_i - x_0) - (x_1 - x_0) = h \cdot i - h = h \cdot (i-1);$$

$$x_i - x_2 = (x_i - x_0) - (x_2 - x_0) = h \cdot i - 2h = h \cdot (i-2);$$

и т. д.

Обобщив алгоритм, можем записать

$$x_i - x_n = (x_i - x_0) - (x_n - x_0) = h \cdot i - h \cdot n = h \cdot (i-n). \qquad (9)$$

На основании выражения (9) получим:

$$W'(x_i) = (x_i - x_0) \cdot (x_i - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_n) =$$

$$= h^n \cdot i \cdot (i-1) \cdot (i-2) \cdot \ldots 1 \cdot (-1) \cdot \ldots \cdot (-(n-i)),$$

т. е.

$$W'(x_i) = (-1)^{n-i} \cdot h^n \cdot i! \cdot (n-i)!. \qquad (10)$$

С учетом равенств (7), (8) и (10) получим частный случай формулы (6) для равноотстоящих узлов:

$$L_n(t) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{h^{n+1} \cdot t(t-1) \cdot (t-2) \cdot \ldots \cdot (t-n)}{(-1)^{n-i} \cdot h \cdot (t-i) \cdot h^n \cdot i! \cdot (n-i)!} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{\prod\limits_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} (t-k)}{i!(n-i)!} y_i. \qquad (11)$$

2.3. Понятие конечных разностей. Связь между конечными разностями и узловыми значениями

Во многих случаях интерполяционный многочлен Лагранжа является громоздким при многократных вычислительных процедурах. Для равноотстоящих узлов или при изменении числа узлов удобнее пользоваться интерполяционными формулами Ньютона.

Введем некоторые понятия.

Пусть таблично задана функция:

x	x_0	x_1	…	x_n
y	y_0	y_1	…	y_n

Конечными разностями 1-го порядка будем называть выражения вида:

$$\begin{cases} \Delta y_0 = y_1 - y_0, \\ \Delta y_1 = y_2 - y_1, \\ \Delta y_2 = y_3 - y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}. \end{cases} \quad \text{; 2-го порядка –} \quad \begin{cases} \Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \\ \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} \end{cases} \quad \text{и т. д.}$$

Как правило, вычисление конечных разностей сводится в таблицу

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	$\underline{y_0}$				
x_1	y_1	$\underline{\Delta y_0}$			
x_2	y_2	Δy_1	$\underline{\Delta^2 y_0}$		
x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\underline{\Delta^3 y_0}$	
x_4	y_4	Δy_3	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_1$	$\underline{\Delta^4 y_0}$

Очевидно, что число конечных разностей на единицу меньше, чем число узлов интерполяционной функции.

Конечные разности многочлена можно выразить через значение функции в узловых точках:

$\Delta y_0 = y_1 - y_0$;

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - y_1 - y_1 + y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$;

$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = \Delta y_2 - \Delta y_1 - (y_2 - 2y_1 + y_0) = y_3 - y_2 - y_1 + y_1 - y_2 + 2y_1 -$
$- y_0 = y_3 - y_2 + 3y_1 - y_0$.

Продолжая этот процесс, можно заметить, что коэффициенты перед соответствующими y_i в представлении конечных разностей являются коэффициентами бинома Ньютона: $C_к^0, C_к^1, C_к^2, \dots\dots C_к^i$. Тогда конечные разности в общем виде можно записать так:

$$\Delta^к y_0 = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \cdot C_k^i \cdot y_i . \tag{12}$$

Аналогичным образом можно представить $\Delta^к y_i$.

Часто важнее бывает выразить значения функции через конечные разности:

$y_1 = y_0 + \Delta y_0$;

$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0$;

$y_3 = y_2 + \Delta y_2 = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0$

и т. д.

Заметим, что коэффициенты слагаемых являются коэффициентами бинома Ньютона. Тогда значение функции, соответствующей k-й узловой точке, может быть определено по формуле

$$y_к = y_0 + k\cdot\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \Delta^к y_0 = y_0 + \sum_{i=0}^{k} C_k^i \cdot \Delta^i y_0\,. \qquad (13)$$

2.4. Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

В силу единственности многочлена степени n, построенного по $n + 1$ узловым значениям функции $f(x)$, формула Ньютона является разновидностью записи интерполяционного многочлена. Однако данная формула удобнее в случае, когда вычисления производятся для сеточных функций с разным количеством узлов. При этом добавление нового узла интерполирования приводит лишь к добавлению одного слагаемого интерполяционного многочлена, в то время как по формуле Лагранжа приходится делать пересчет всей таблицы.

В начале таблицы используют первую интерполяционную формулу Ньютона, а в конце – вторую. Рассмотрим один из способов построения первой интерполяционной формулы.

Пусть некоторая функция $f(x)$ задана табличными значениями $y_0 = f(x_0)$; $y_1 = f(x_1)$; ...; $y_n = f(x_n)$ в равноотстоящих узлах интерполяции $\{x_0, x_1 = x_0 + h; \ldots; x_n = x_0 + n\cdot h\}$. Требуется построить интерполяционный полином Ньютона $L_n(x)$ степени n, при котором

$$L_n(x_0) \equiv y_0;\ L_n(x_1) \equiv y_1;\ \ldots;\ L_n(x_n) \equiv y_n.$$

Будем искать полином в виде

$$L_n(x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)\cdot(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)\,(x - x_1)\cdot\ldots\cdot(x - x_n),$$

где a_i –неизвестные коэффициенты.

Для того чтобы найти a_0, положим $x = x_0$. Очевидно, что при этом $L_n(x_0) \equiv y_0$. Но так как все члены уравнения, кроме первого, содержат сомножитель $(x - x_0)$, следовательно, они все станут равными нулю, т. е. $a_0 \equiv y_0$. Для того чтобы найти a_1, положим $x = x_1$. Повторив все рассуждения и учитывая, что значение полинома в указанной точке будет тождественно равно y_1, после подстановки в формулу x_1 имеем

$$L_n(x_1) = a_0 + a_1\cdot(x_1 - x_0) = y_0 + a_1\cdot h = y_1.$$

Все остальные сомножители при неизвестных коэффициентах a_i будут равны нулю. Преобразуя последнее выражение, находим a_1 как $a_1 = \Delta_1/h$, где $\Delta_1 = L_n(x_0 + h) - L_n(x_0) = y_1 - y_0$. Для того чтобы определить a_2, положим $x = x_2$ и, рассуждая аналогично, определим третий коэффициент как $a_2 = \Delta_2/(2!\,h^2)$.

Подставляя в выражение последовательно все x_n, приходим к общей формуле для получения коэффициентов a_i:

$$a_i = \Delta_i/(i!\cdot h^i).$$

Тогда интерполяционный многочлен Ньютона для равноотстоящих узлов будет выглядеть следующем образом:

$$L_n(x) = y_0 + \frac{\Delta_1}{1!\cdot h}(x - x_0) + \frac{\Delta_2}{2!\cdot h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \frac{\Delta_n}{n!\cdot h^n}\prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)\ .$$

Сделав в данной формуле замену переменных: $t = (x - x_0) / h$, где h – шаг интерполирования, получаем *первую интерполяционную формулу Ньютона*:

$$L_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n}\frac{t\cdot(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-k+1)}{k!}\cdot\Delta^k y_0 \qquad (14)$$

Вторую интерполяционную формулу Ньютона получают, если узлы интерполяции в $L_n(x)$ берут в несколько ином порядке:

$$L_n(x_0) = a_0 + a_1\cdot(x - x_n) + a_2(x - x_n)\cdot(x - x_{n-1}) + \ldots$$
$$+ a_n\cdot(x - x_n)\cdot(x - x_{n-1})\cdot\ldots\cdot(x - x_0).$$

Тогда, рассуждая, как и в случае первой интерполяционной формулы, получаем искомую форму записи полинома Ньютона, которая известна как *вторая интерполяционная формула*:

$$L_n(x) = y_n + \frac{\Delta_1}{1!\cdot h}\cdot(x - x_n) + \frac{\Delta_2}{2!\cdot h^2}\cdot(x - x_n)\cdot(x - x_{n-1}) + \ \ldots$$
$$+ \frac{\Delta_n}{n!\cdot h^n}\cdot\prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i).$$

Выполнив подстановку $t = (x - x_n) / h$, получим иную запись интерполяционного многочлена Ньютона:

$$L_n(x) = y_n + \Delta_1 \cdot t + \frac{\Delta_2 \cdot t \cdot (t+1)}{2!} + \ldots\ldots + \frac{\Delta_n \cdot t \cdot (t+1) \cdot \ldots \cdot (t+n-1)}{n!} \quad . (15)$$

Пример. Реализовать в Microsoft Excel и MathCAD первую и вторую интерполяционные формулы для функции, заданной таблицей равноотстоящих узлов

x	0	1	2	3	4
y	–1,6	–2,305	–3,678	–10,96	–5,356

Построить графики интерполируемой и интерполирующих функций, совместив их на одной координатной плоскости.

Решение. Реализация задачи в Microsoft Excel показана на рис. 8.

Таблица конечных разностей

x	y				
0	-1,6				
1	-2,305	-0,705			
2	-3,678	-1,373	-0,668		
3	-10,96	-7,282	-5,909	-5,241	
4	-5,356	5,604	12,886	18,795	24,036

Реализация первой и второй интерполяционной формулы

x	h	t1	y1	t2	y2
0	1	0	-1,600	-4	-1,600
0,2		0,2	-2,747	-3,8	-2,747
0,4		0,4	-3,137	-3,6	-3,137
0,6		0,6	-3,044	-3,4	-3,044
0,8		0,8	-2,701	-3,2	-2,701
1		1	-2,305	-3	-2,305
1,2		1,2	-2,012	-2,8	-2,012
1,4		1,4	-1,942	-2,6	-1,942
1,6		1,6	-2,175	-2,4	-2,175
1,8		1,8	-2,752	-2,2	-2,752
2		2	-3,678	-2	-3,678
2,2		2,2	-4,917	-1,8	-4,917
2,4		2,4	-6,396	-1,6	-6,396
2,6		2,6	-8,003	-1,4	-8,003
2,8		2,8	-9,587	-1,2	-9,587
3		3	-10,960	-1	-10,960
3,2		3,2	-11,895	-0,8	-11,895
3,4		3,4	-12,125	-0,6	-12,125
3,6		3,6	-11,347	-0,4	-11,347
3,8		3,8	-9,217	-0,2	-9,217
4		4	-5,356	0	-5,356

Рис. 8. Результаты применения первой и второй интерполяционных формул Ньютона.

Решение задачи в MathCAD показано на рис. 9.

Определение заданной функции таблично:

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} -1.6 \\ -2.305 \\ -3.678 \\ -10.96 \\ -5.356 \end{pmatrix} \qquad n := 4 \qquad h := \frac{x_n - x_0}{n} \qquad i := 0..n$$

Определение конечных разностей:

$$j := 0..n-1 \qquad k := 0..n-2 \qquad m := 0..n-3 \qquad s := 0..n-4$$

$$\Delta y_j := y_{j+1} - y_j \qquad \Delta 2y_k := \Delta y_{k+1} - \Delta y_k \qquad \Delta 3y_m := \Delta 2y_{m+1} - \Delta 2y_m \qquad \Delta 4y_s := \Delta 3y_{s+1} - \Delta 3y_s$$

Заполнение матрицы конечных разностей:

$$\Delta_{i,0} := y_i \qquad \Delta_{j,1} := \Delta y_j \qquad \Delta_{k,2} := \Delta 2y_k \qquad \Delta_{m,3} := \Delta 3y_m \qquad \Delta_{s,4} := \Delta 4y_s$$

Матрица конечных разностей:

$$\Delta = \begin{pmatrix} -1.6 & -0.705 & -0.668 & -5.241 & 24.036 \\ -2.305 & -1.373 & -5.909 & 18.795 & 0 \\ -3.678 & -7.282 & 12.886 & 0 & 0 \\ -10.96 & 5.604 & 0 & 0 & 0 \\ -5.356 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Реализация первой интерполяционной формулы Ньютона:

$$t(X) := \frac{X - x_0}{h} \qquad t1(X,k) := t(X) - k + 1 \qquad L(X,i) := \Delta_{0,i} \cdot \prod_{k=1}^{i} \frac{t1(X,k)}{k}$$

$$Nuton1(X) := \sum_{i=1}^{n} L(X,i) + \Delta_{0,0}$$

Реализация второй интерполяционной формулы Ньютона:

$$t2(X) := \frac{X - x_n}{h} \qquad t3(X,k) := t2(X) + k - 1 \qquad L1(X,i) := \Delta_{n-i,i} \cdot \left(\prod_{k=1}^{i} \frac{t3(X,k)}{k} \right)$$

$$Nuton2(X) := \sum_{i=1}^{n} L1(X,i) + \Delta_{n,0} \qquad X := 0, 0.01..4$$

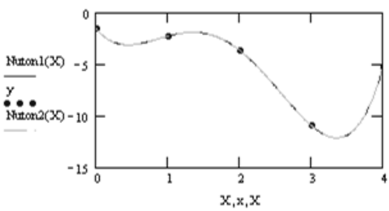


Рис. 9. Реализация первой и второй интерполяционных формул Ньютона для равноотстоящих узлов.

На практике при определении промежуточных значений функции, заданной таблично, не всегда целесообразно привлекать в вычислительный процесс все конечные разности. Можно заметить, что довольно хороший результат может быть получен при использовании уже конечных разностей выше третьего порядка. При этом первую интерполяционную формулу Ньютона целесообразно использовать для интерполирования в начале заданной таблицы, а при интерполировании в конце таблицы – вторую интерполяционную формулу.

Пример. На отрезке [0; 4] в MathCAD протабулировать функцию $f(x) = \sin(x + e^{\sin(x)})$, разбив его равномерной сеткой на 10 элементарных отрезков. Для полученной таблицы реализовать интерполяционную формулу Ньютона, используя четыре конечные разности.

Решение. Решение задачи в MathCAD показано на рис. 10.

$f(x) := \sin\left[x + (e)^{\sin(x)}\right] \quad a := 0 \quad b := 4 \quad n := 10 \quad h := \dfrac{b-a}{10}$

$i := 0..n \quad x_i := i \cdot h + a \quad y_i := f(x_i) \quad j := 0..n$

Определение конечных разностей:

$j := 0..n-1 \quad k := 0..n-2 \quad m := 0..n-3 \quad s := 0..n-4$

$\Delta y_j := y_{j+1} - y_j \quad \Delta 2y_k := \Delta y_{k+1} - \Delta y_k \quad \Delta 3y_m := \Delta 2y_{m+1} - \Delta 2y_m \quad \Delta 4y_s := \Delta 3y_{s+1} - \Delta 3y_s$

Заполнение матрицы конечных разностей:

$\Delta_{i,0} := y_i \quad \Delta_{j,1} := \Delta y_j \quad \Delta_{k,2} := \Delta 2y_k \quad \Delta_{m,3} := \Delta 3y_m \quad \Delta_{s,4} := \Delta 4y_s$

Реализация первой интерполяционной формулы Ньютона: $n := 4$

$t(X) := \dfrac{X - x_0}{h} \quad t1(X,k) := t(X) - k + 1 \quad L(X,i) := \Delta_{0,i} \cdot \prod_{k=1}^{i} \dfrac{t1(X,k)}{k}$

$Nuton1(X) := \sum_{i=1}^{n} L(X,i) + \Delta_{0,0}$

Реализация второй интерполяционной формулы Ньютона: $p := n \quad n := 10$

$t2(X) := \dfrac{X - x_n}{h} \quad t3(X,k) := t2(X) + k - 1 \quad L1(X,i) := \Delta_{n-i,i} \cdot \left(\prod_{k=1}^{i} \dfrac{t3(X,k)}{k}\right)$

$Nuton2(X) := \sum_{i=1}^{p} L1(X,i) + \Delta_{n,0}$

$Nuton(Z) := if\left(\dfrac{x_0 + x_n}{2} - Z > 0, Nuton1(Z), Nuton2(Z)\right)$

$Nuton(0.85) = 0.179 \qquad Nuton(2.41) = -0.939$

Рис. 10. Реализация задачи в MathCAD.

2.5. Интерполяционные формулы с центральными разностями

При построении интерполяционных формул Ньютона используются лишь значения функции, лежащие по одну сторону от выбранного начального значения, т. е. эти формулы носят односторонний характер.

Во многих случаях оказываются полезными интерполяционные формулы, содержащие как последующие, так и предшествующие значения функции по отношению к ее начальному значению. Наиболее употребительными из них являются те, которые содержат разности, расположенные в горизонтальной строке диагональной таблицы разностей данной функции, соответствующей начальным значениям x_0 и y_0, или в строках, непосредственно примыкающих к ней. Эти разности Δy_{-1}, Δy_0, $\Delta^2 y_{-1}$, … называются центральными разностями, где $x_i = x_0 + i \cdot h$ ($i = 0, \pm1, \pm2, \ldots$), $y_i = f(x_i)$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ и т. д. Их удобно записывать в таблицу

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$	$\Delta^7 y$	$\Delta^8 y$
x_{-4}	y_{-4}	Δy_{-4}							
x_{-3}	y_{-3}	Δy_{-3}	$\Delta^2 y_{-4}$	$\Delta^3 y_{-4}$					
x_{-2}	y_{-2}	Δy_{-2}	$\Delta^2 y_{-3}$	$\Delta^3 y_{-3}$	$\Delta^4 y_{-4}$	$\Delta^5 y_{-4}$			
x_{-1}	y_{-1}	Δy_{-1}	$\Delta^2 y_{-2}$	$\Delta^3 y_{-2}$	$\Delta^4 y_{-3}$	$\Delta^5 y_{-3}$	$\Delta^6 y_{-4}$	$\Delta^7 y_{-4}$	
$\boldsymbol{x_0}$	$\boldsymbol{y_0}$	$\boldsymbol{\Delta y_0}$	$\boldsymbol{\Delta^2 y_{-1}}$	$\boldsymbol{\Delta^3 y_{-1}}$	$\boldsymbol{\Delta^4 y_{-2}}$	$\boldsymbol{\Delta^5 y_{-2}}$	$\boldsymbol{\Delta^6 y_{-3}}$	$\boldsymbol{\Delta^7 y_{-3}}$	$\boldsymbol{\Delta^8 y_{-4}}$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_{-1}$	$\Delta^5 y_{-1}$	$\Delta^6 y_{-2}$		
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_0$				
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_2$						
x_4	y_4								

Соответствующие интерполяционные формулы носят название *интерполяционных формул с центральными разностями.* К их числу относятся формулы Гаусса, Стирлинга и Бесселя.

Существуют определенные рекомендации по применению этих формул. Так, формулу Гаусса и Бесселя целесообразно применять в случае когда $0{,}25 \le |t| \le 0{,}75$, а формулу Стирлинга, если $|t| \le 0{,}25$, где $t = \dfrac{x - x_0}{h}$.

Интерполяционные формулы Гаусса. Пусть имеется $2n + 1$ равноотстоящих узлов интерполирования: $x_{-n}, x_{-(n-1)}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ и для искомой функции $y = f(x)$ известны ее значения в этих узлах $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, \pm1, \pm2, \ldots$).

Требуется подобрать многочлен $L_{2n}(x)$ степени не выше $2n$ такой, что $L_{2n}(x_i) = y_i$.

Будем искать этот многочлен в виде

$$L_{2n}(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + a_3 \cdot (x - x_{-1}) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) +$$
$$+ \ldots + a_{2n-1} \cdot \cdot (x - x_{-(n-1)}) \cdot \ldots \cdot x_0 \cdot \ldots \cdot (x - x_{(n-1)}) + a_{2n} \cdot (x - x_{-n}) \cdot \ldots \cdot x_0 \cdot \ldots \cdot (x - x_n),$$

где $a_{2n} = \dfrac{\Delta^{2n} y_{-n}}{(2n)! \cdot h^{2n}}$.

Введя переменную $t = \dfrac{x - x_0}{h}$ и понятие обобщенных степеней $t^{[m]} = t\,(t-1)(t-2)\ \ldots\ (t-(m-1))$ получим *первую интерполяционную формулу Гаусса*:

$$L_{2n}(x) = y_0 + t \cdot \Delta y_0 + \frac{t^{[2]}}{2!} \cdot \Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1)^{[3]}}{3!} \cdot \Delta^3 y_{-1} + \frac{(t+1)^{[4]}}{4!} \cdot \Delta^4 y_{-2} + \ldots$$

$$+ \frac{(t+n-1)^{[2n-1]}}{(2n-1)!} \cdot \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + + \frac{(t+n-1)^{[2n]}}{(2n)!} \cdot \Delta^{2n} y_{-n}. \qquad (16)$$

Первая интерполяционная формула Гаусса содержит центральные разности

$$\Delta y_0, \Delta^2 y_{-1}, \Delta^3 y_{-1}, \Delta^4 y_{-2}, \Delta^5 y_{-2}, \Delta^6 y_{-3}, \ldots$$

Аналогично можно получить *вторую интерполяционную формулу Гаусса,* содержащую центральные разности

$$\Delta y_{-1}, \Delta^2 y_{-1}, \Delta^3 y_{-2}, \Delta^4 y_{-2}, \Delta^5 y_{-3}, \Delta^6 y_{-3}, \ldots$$

Вторая интерполяционная формула Гаусса имеет вид

$$L_{2n}(x) = y_0 + t \cdot \Delta y_{-1} + \frac{(t+1)^{[2]}}{2!} \cdot \Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1)^{[3]}}{3!} \cdot \Delta^3 y_{-2} + \frac{(t+2)^{[4]}}{4!} \cdot \Delta^4 y_{-2} + \ldots$$

$$+ \frac{(t+n-1)^{[2n-1]}}{(2n-1)!} \cdot \Delta^{2n-1} y_n + \frac{(t+n)^{[2n]}}{(2n)!} \cdot \Delta^{2n} y_{-n}. \qquad (17)$$

Пример. Подобрать интерполяционный полином Гаусса для функции, заданной таблицей

x	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
y	1,552	1,67188	1,783	1,88463	1,976	2,05638	2,125

Найти значение интерполяционного многочлена в точке $x = 0{,}31$.

Решение. Составляем таблицу конечных разностей, приняв x_0=0,35, y_0=1,8847:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0,2	1,552	0,119875			
0,25	1,67188	0,111125	–0,00875	–0,00075	
0,3	1,783	0,101625	–0,0095	–0,00075	
0,35	1,88463	0,091375	–0,01025	–0,00075	
0,4	1,976	0,080375	–0,011	–0,00075	
0,45	2,05638	0,068625	–0,01175		
0,5	2,125				

Так как разности третьего порядка практически постоянны, то в формуле Гаусса можно ограничиться конечными разностями третьего порядка. На основании этого можно сделать предположение, что исходная функция является многочленом третьей степени.

Применяя первую интерполяционную формулу Гаусса, будем иметь интерполяционный многочлен

$$L(x) = y_0 + t \cdot \Delta y_0 + \frac{t \cdot (t-1)}{2!} \cdot \Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1) \cdot t \cdot (t-1)}{3!} \cdot \Delta^3 y_{-1}.$$

Для рассматриваемого примера определим $t = \dfrac{0,31 - 0,35}{0,05} = -0,8.$

Подставив в данную формулу значение переменной $t = -0{,}8$, получим $L(x) = 1{,}804109$.

Интерполяционная формула Стирлинга. Взяв среднее арифметическое первой и второй интерполяционных формул Гаусса (17) и (18), получим *формулу Стирлинга*

$$L_{2n}(x) = y_0 + t \cdot \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{t^2}{2} \cdot \Delta^2 y_{-1} + \frac{t \cdot (t^2-1)}{3!} \cdot \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} +$$

$$+ \frac{t \cdot (t^2-1)}{4!} \cdot \Delta^4 y_{-2} + \frac{t \cdot (t^2-1) \cdot (t^2-2^2)}{5!} \cdot \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} +$$

$$+ \frac{t \cdot (t^2-1) \cdot (t^2-2^2)}{6!} \cdot \Delta^6 y_{-3} + \ldots +$$

$$+ \frac{t \cdot (t^2-1) \cdot (t^2-2^2) \cdot (t^2+3^2) \cdot \ldots \cdot [t^2-(n-1)^2]}{(2n)!} \cdot \Delta^{2n} y_{-n} +$$

$$+ \frac{t \cdot (t^2-1) \cdot (t^2-2^2) \cdot (t^2+3^2) \cdot \ldots [t^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!} \cdot \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n} + \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{2} \quad (18)$$

Пример. Решить предыдущую задачу с помощью интерполяционной формулы Стирлинга.

Решение. Для решения данной задачи можем воспользоваться таблицей конечных разностей, просчитанной в предыдущем примере. Тогда реализуя формулу (19) в нашем случае интерполяционный многочлен Стирлинга примет вид

$L(x) = 1{,}88463 + t \cdot (0{,}101625 + 0{,}091375) / 2 + t^2 \cdot (-0{,}01025) / 2 +$

$+ t \cdot (t^2 - 1) \cdot (-0{,}00075 - 0{,}00075) / 12.$

Подставив в данную формулу значение переменной $t = -0{,}8$, соответствующее значению переменной $x = 0{,}31$, получим $L(x) = 1{,}804109$.

2.6. Понятие конечных разностей.
Общий вид интерполяционной формулы Ньютона

Для получения интерполяционной формулы Ньютона более общего вида введем следующие обозначения:

– *разностные отношения 1-го порядка:*

$$\begin{cases} \Delta(x_0, x_1) = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ \Delta(x_1, x_2) = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta(x_{n-1}, x_n) = \dfrac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \end{cases}$$

–*разностные отношения 2-го порядка:*

$$\begin{cases} \Delta(x_0, x_1, x_2) = \dfrac{\Delta(x_1, x_2) - \Delta(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} \\ \Delta(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{\Delta(x_2, x_3) - \Delta(x_1, x_2)}{x_3 - x_1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) = \dfrac{\Delta(x_{n-1}, x_n) - \Delta(x_{n-2}, x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}} \end{cases}$$

и так далее:

$$\Delta(x_0, x_1, ..., x_к) = \frac{\Delta(x_1, x_2, ..., x_к) - \Delta(x_0, x_1, ..., x_{к-1})}{x_к - x_0}$$ *разностные отношения к-го порядка*.

Вычисление разностных отношений, как и конечных разностей, сводится в таблицу.

n	x_i	y_i	$\Delta(x_i, x_{i+1})$	$\Delta(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$	$\Delta(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\ x_{i+3})$	$\Delta(x_i, \dots, x_{i+4})$
1	x_0	y_0				
2	x_1	y_1	$\underline{\Delta(x_0, x_1)}$			
3	x_2	y_2	$\Delta(x_1, x_2)$	$\underline{\Delta(x_0, x_1, x_2)}$		
4	x_3	y_3	$\Delta(x_2, x_3)$	$\Delta(x_1, x_2, x_3)$	$\underline{\Delta(x_0, x_1, x_2, x_3)}$	
5	x_4	y_4	$\Delta(x_3, x_4)$	$\Delta(x_2, x_3, x_4)$	$\Delta(x_1, x_2, x_3, x_4)$	$\underline{\Delta(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)}$

На основании этой таблицы можно составить интерполяционный многочлен Ньютона, который представляется в виде

$$L_n(x) = P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^{n}(x - x_0)\cdot\ldots\cdot(x - x_{i-1})\cdot\Delta(x_0,\ldots,x_i) =$$
$$= y_0 + (x - x_0)\cdot\Delta(x_0, x_1) + (x - x_0)\cdot(x - x_1)\Delta(x_0, x_1, x_2) + \ldots$$
$$+(x - x_0)\cdot\ldots\cdot(x - x_{n-1})\Delta(x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

Фактически для составления интерполяционного многочлена разностные отношения этого многочлена необходимо списать из верхней строки таблицы.

Пример. Функция $y = f(x)$ задана таблично:

x	0,4	0,55	0,65	0,8	0,9	1,05
y	0,41075	0,57815	0,69675	0,88811	1,02652	1,25380

Построить интерполяционный многочлен Ньютона и найти его значение в точке x_0=0,596.

Решение.

x	y	$\Delta(x_i, x_{i+1})$	$\Delta(\mathrm{x_i}, x_{i+1}, x_{i+2})$	$\Delta(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\ x_{i+3})$	$\Delta(x_i, \ldots, x_{i+4})$
0,4	0,4108				
0,55	0,5782	1,116			
0,65	0,6968	1,186	0,28		
0,8	0,8881	1,2757	0,3589	0,1973	
0,9	1,0265	1,3841	0,4335	0,213	0,034
1,05	1,2538	1,5152	0,5244	0,2273	0,034

Из таблицы видно, что разностные отношения четвертого порядка постоянны. Поэтому будем интерполировать функцию многочленом Ньютона четвертого порядка.

$$L_4(x) = 0,41075 + (x - 0,4)\cdot 1,116 + (x - 0,4)(x - 0,55)\cdot 0,28 + (x - 0,4)\times$$
$$\times(x - 0,55)(x - 0,65)\cdot 0,197 + (x - 0,4)(x - 0,55)(x - 0,65)(x - 0,8)\cdot 0,034.$$

Подставив в полученный многочлен заданную точку, получим $L_4(0,596) = 0,63192$.

Примечания:

1. Существует связь между разностными отношениями и конечными разностями при равноотстоящих узлах. Эта связь выражается формулой

$$\Delta(x_0, x_1, \ldots., x_n) = \frac{\Delta^k y}{h^k \cdot k!}.$$

2. Если интерполируемая функция является многочленом n-й степени, то разностные отношения n-го порядка будут постоянными величинами, а отношение $(n + 1)$-го порядка равно 0.

2.7. Погрешность алгебраического интерполирования

Очевидно, что всякое интерполирование – это лишь приближенный подбор функции. Причем степень такого приближения может быть разная. Поэтому важной задачей является оценка погрешности интерполирования.

Исходя из основного интерполяционного тождества можно заметить, что значения интерполируемой f(x) функции и интерполирующего полинома $\varphi_n(x)$ совпадают только в узлах интерполяции (x_i; y_i), $i=\overline{0,n}$. Между узлами функция $\varphi_n(x)$ может вести себя произвольным образом, сколь угодно далеко отклоняясь от зависимости f(x). Определить погрешность приближения можно, используя выражение для абсолютной ошибки $\varepsilon=\max|f(x)-\varphi_n(x)|$. Однако такая оценка возможна только в том случае, когда исходная функция задана аналитически.

Аналитически погрешность алгебраической интерполяции можно вычислить по следующей формуле:

$$r_n(x)=\frac{|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)|}{(n+1)!}M_{n+1}=\frac{|W(x)|}{(n+1)!}M_{n+1}, \tag{19}$$

где $M_{n+1}=\max\limits_{x\in[a;b]}|f^{(n+1)}(x)|$ – максимальное значение (n + 1)-й производной функции $f(x)$ по абсолютной величине на отрезке [a; b].

Из формулы видно, что вклад в погрешность вносят три компоненты: произведение разностей по абсолютной величине $|W(x)|$, максимальное значение (n + 1)-й производной M_{n+1} функции $f(x)$ по абсолютной величине на отрезке [a; b] и величина факториала (n + 1)!. Причем факториал и произведение разностей с увеличением n уменьшают ошибку, однако порядок производной при этом растет. Для многих функций величина M_{n+1} увеличивается быстрее, чем величина факториала в знаменателе. В результате полиномиальные интерполянты редко сходятся к обычной непрерывной функции. Для большинства функций с повышением степени интерполирующего полинома погрешность возрастает. Поэтому на практике использование интерполянтов выше пятой степени считается нецелесообразным.

При равномерном разбиении исходного отрезка остаточный член интерполяции примет вид

$$r_n(x) = \left| h^{n+1} \cdot \frac{(t-1)\cdot(t-2)\cdot\ldots\cdot(t-n)}{(n+1)!} \right| M_{n+1}. \qquad (20)$$

Однако применение формул (19) и (20) затрудняется в сложности оценки величины M_{n+1}. При интерполировании по формуле Ньютона эта задача решается проще – остаточный член вычисляется следующим образом:

$$r_n(x) = \frac{\Delta^n y}{(n+1)!} \cdot \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|, \qquad (21)$$

где $\Delta^n y$ можно считать, как среднее арифметическое конечных разностей n-го порядка.

Точность приближения зависит не только от числа узлов интерполирования (т.е. порядка интерполирующего полинома), но и от их расположения на выбранном отрезке $[a; b]$. В простейшем случае выбирается равномерное расположение точек $(x_i; y_i)$, $i = \overline{0,n}$ на интервале $[a; b]$ с шагом $h = (b - a)/(n - 1)$. Однако, как показывает практика, равномерное расположение не является оптимальным с точки зрения лучшего приближения $\varphi(x)$ к зависимости $f(x)$. Доказано, что оптимальным для интерполяции является расположение узлов на интервале $[a; b]$ по формуле Чебышева

$$x_{i+1} = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\right), \; i = \overline{0,n}. \qquad (22)$$

3. ЗАДАНИЯ, РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

1. Для функции, заданной таблицей, воспользовавшись основным интерполяционным тождеством, составить систему линейных уравнений и найти неизвестные параметры интерполяционного полинома.

x	1	3	4
y	–8	2	6

По полученному полиному подсчитать значение в точке $x = 5{,}678$.

2. Для таблично заданной функции получить алгебраический, тригонометрический и экспоненциальный интерполянт.

x	1,23	2,396	4,5	5,2
y	0,882384	0,417701	0,355974	0,352112

Оценить погрешность каждого из интерполирований, совместив на одной координатной плоскости графики полученных интерполянтов и график исходной функции. Выбрать наилучшее приближение.

3. Для функции $y = \cos(2{,}5x)$ построить интерполяционный полином Лагранжа, выбрав узлы: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Найти погрешности результатов путем сравнения их со значениями интерполируемой функции $f(x)$.

4. Дана таблица значений функции $y = f(x)$

x	1	2	4	5
y	6	8	10	9

Вычислить $f(3{,}5)$, используя интерполяционную формулу Лагранжа. Показать графически выполнение основного интерполяционного тождества.

5. Дана таблица значений функции $y = f(x)$

x	1,0	2,0	3,0	4,0
y	12	5,5	3,2	7

Построить интерполяционные полиномы, используя первую и вторую интерполяционные формулы Ньютона.

6. Пользуясь интерполяционными формулами Ньютона, вычислить значения функции в точках $x = 0{,}1$ и $x = 0{,}9$ для функции $y = f(x)$, заданной таблично:

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y	1,2	2,4	3,6	4,8	5,9	7,1

7. Имея таблицу значений функции $y = \sin(x)$

x	15º	20º	25º	30º	35º	40º	45º	50º	55º
y	0,2588	0,342	0,4226	0,5	0,5736	0,6428	0,7071	0,7660	0,8192

произвести алгебраическую интерполяцию по формуле Ньютона, используя лишь четыре конечные разности, и оценить погрешность вычислений на заданном отрезке.

8. Для функции $y = \sin(x + e^{\sin x})$ на отрезке [0; 3] получить пять точек разбиения при равномерном распределении и распределении по формуле Чебышева. Для полученных табличных функций найти соответствующие интерполянты и погрешности формул. Сделать вывод.

4. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какое из понятий более общее: интерполяция, аппроксимация, экстраполяция?
2. В чем состоит различие между интерполяцией и экстраполяцией?
3. Для чего нужна интерполяция функций?

4. Охарактеризуйте виды интерполяции.

5. Какое условие должно быть выполнено при интерполяции?

6. Как связана степень интерполяционного многочлена с количеством узлов интерполяции?

7. Как будет выглядеть основное интерполяционное тождество для алгебраической интерполяции при задании четырех узлов и узловых значений интерполируемой функции?

8. Как будет выглядеть основное интерполяционное тождество для тригонометрической интерполяции при задании четырех узлов и узловых значений интерполируемой функции?

9. Как будет выглядеть основное интерполяционное тождество для экспоненциальной интерполяции при задании пяти узлов и узловых значений интерполируемой функции?

10. Как строятся интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона? В чем особенности этих двух способов интерполяции?

11. Какие виды глобальной интерполяции вам известны?

12. Какие интерполяционные формулы применяются, если узлы интерполяции равноотстоящие?

13. Что такое конечные разности?

14. Как выглядят разностные отношения?

15. Какую интерполяционную формулу Ньютона необходимо применять в начале таблично заданной функции, и какую – в конце? Почему?

16. Сколько интерполяционных полиномов можно построить при заданном наборе узлов интерполяции?

17. Чем обуславливается выбор способов реализации формулы алгебраической интерполяции?

18. Какие способы повышения точности интерполяции вы знаете?

19. Какие способы оценки погрешности интерполяций вы знаете?

5. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1. С помощью алгебраического интерполирования найти многочлен, совпадающий со значениями в узловых точках, построить его график. Найти приближенное значение функции в точке x_0.

Вариант 1			**Вариант 2**			**Вариант 3**			**Вариант 4**		
x	y	x_0	x	y	x_0	x	y	x_0	x	y	x_0
1,3	3,27		0	1,45		11	1342		–2	25	
1,52	4,22	1,356	1,5	3,14	1,567	13	2210	12,56	1	–8	1,389
1,83	5,05		6,8	4,11		14	2758		2	–15	
Вариант 5			**Вариант 6**			**Вариант 7**			**Вариант 8**		
x	y	x_0	x	y	x_0	x	y	x_0	x	y	x_0
–1,3	2,27		0,6	1,45		11	13,42		–2	2,5	
1,52	4,22	1,256	1,5	5,14	1,567	13	22,10	12,56	1	–8,6	1,689
1,83	5,05		6,8	7,11		14	27,58		2	–1,5	

Вариант 9			**Вариант 10**			**Вариант 11**			**Вариант 12**		
x	y	x_0	x	y	x_0	x	y	x_0	x	y	x_0
1,3	7,27		1,6	1,45		1,1	13,76		–5	2,5	
7,52	4,22	2,256	9,5	5,14	2,567	3,3	22,15	2,56	1	–8	1,989
9,83	0,05		10,8	7,11		5,4	27,38		2	– 5	
Вариант 13			**Вариант 14**			**Вариант 15**			**Вариант 16**		
x	y	x_0	x	y	x_0	x	y	x_0	x	y	x_0
–1,8	7,27		0,6	3,45		–1,1	13,76		–7	6,5	
6,35	4,22	7,256	5,5	4,14	8,56	3,3	22,15	–0,56	23	–6	5,989
9,26	0,05		11,8	9,11		7,4	27,38		34	–0,5	

Задание 2. Для таблично заданных функций выполнить алгебраическую тригонометрическую и экспоненциальную интерполяцию. Совместив графики интерполируемой и интерполирующих функций на одной координатной плоскости, оценить наилучшее приближение. Для наилучшего приближения подсчитать значение функции в точке x_0.

Вариант 1			**Вариант 2**			**Вариант 3**			**Вариант 4**		
x	y	x_0	x	y	x_0	x	y	x_0	x	y	x_0
1	0,702		2	0,102		3	0,526		4	0,616	
7	0,512		8	0,114		9	0,453		10	0,478	
13	0,645	5,356	14	0,125	13,56	15	0,482	12,56	16	0,565	11,89
19	0,736		20	0,203		21	0,552		22	0,537	
25	0,608		26	0,154		27	0,436		28	0,673	
Вариант 5			**Вариант 6**			**Вариант 7**			**Вариант 8**		
x	y	x_0	x	y	x_0	x	y	x_0	x	y	x_0
5	0,896		6	0,314		1	1,3832		2	0,1264	
11	0,812		12	0,235		7	1,3926		8	0,1315	
17	0,774	15,25	18	0,332	13,56	13	1,3862	11,53	14	0,1232	14,68
23	0,955		24	0,275		19	1,3934		20	0,1334	
29	0,715		30	0,186		25	1,3866		26	0,1285	
Вариант 9			**Вариант 10**			**Вариант 11**			**Вариант 12**		
x	y	x_0	x	y	x_0	x	y	x_0	x	y	x_0
3	0,152		4	0,1838		5	0,2121		6	1,4179	
9	0,161		10	0,1875		11	0,2165		12	1,4258	
15	0,166	7,156	16	0,1944	5,1867	17	0,2232	10,56	18	1,4396	17,98
21	0,154		22	0,1976		23	0,2263		24	1,4236	
27	0,162		28	0,2038		29	0,2244		30	1,4315	
Вариант 13			**Вариант 14**			**Вариант 15**			**Вариант 16**		
x	y	x_0	x	y	x_0	x	y	x_0	x	y	x_0
3	8,152		4	1,1838		5	7,2121		6	2,4179	
9	12,161		10	2,1875		11	8,2165		12	3,4258	
15	14,166	6,256	16	3,1944	22,567	17	9,2232	9,56	18	2,4396	17,98
21	18,154		22	4,1976		23	9,2263		24	1,4236	
27	20,162		28	5,2038		29	8,2244		30	2,4315	

Задание 3. С помощью формулы Лагранжа проинтерполировать табличные функции задания 1. Построить графики исходной и интерполирующей функции, совместив их на одной координатной плоскости. Найти приближенное значение функции в точке x_0. Сравнить результаты, полученные в задании 1 и задании 3.

Задание 4. Используя первую и вторую интерполяционные формулы Ньютона, подсчитать значения функции в точке x_0=1,25, x_1=2,93. Найти погрешности результатов путем сравнения их со значениями интерполируемой функции $f(x)$.

Вариант	x	y	$f(x)$	Вариант	x	y	$f(x)$
1	1	0,842	$\frac{\sin(x)}{x}$	**2**	1	0,841	$\frac{\sin(x^2)}{x^3}$
	1,35	0,723			1,35	0,717	
	1,7	0,583			1,7	0,146	
	2,05	0,433			2,05	–0,426	
	2,4	0,2814			2,4	–0,208	
	2,75	0,1388			2,75	0,348	
	3,1	0,013			3,1	–0,059	
3	1	0,841	$\frac{\sin(x)}{x^2}$	**4**	1	0,841	$\frac{\sin(x^2)}{x^3}$
	1,35	0,535			1,35	0,394	
	1,7	0,343			1,7	0,051	
	2,05	0,211			2,05	–0,101	
	2,4	0,117			2,4	–0,036	
	2,75	0,050			2,75	0,046	
	3,1	0,004			3,1	–0,006	
5	1	0,841	$\frac{\sin(x^2)}{x^2}$	**6**	1	0,841	$\frac{\sin(x)}{x^4}$
	1,35	0,531			1,35	0,294	
	1,7	0,086			1,7	0,119	
	2,05	–0,208			2,05	0,050	
	2,4	–0,087			2,4	0,020	
	2,75	0,127			2,75	0,007	
	3,1	–0,019			3,1	0,000	
7	1	0,540	$\frac{\cos(x^2)}{x^2}$	**8**	1	0,540	$\frac{\cos(x)}{x^4}$
	1,35	–0,137			1,35	0,066	
	1,7	–0,335			1,7	–0,015	
	2,05	–0,116			2,05	–0,026	
	2,4	0,150			2,4	–0,022	
	2,75	0,038			2,75	–0,016	
	3,1	–0,102			3,1	–0,011	
9	1	0,540	$\frac{\cos(x^3)}{x^2}$	**10**	1	0,540	$\frac{\cos(x^7)}{x^2}$
	1,35	–0,426			1,35	–0,172	
	1,7	0,069			1,7	–0,340	
	2,05	–0,164			2,05	0,051	
	2,4	0,053			2,4	0,174	
	2,75	–0,049			2,75	–0,040	
	3,1	–0,006			3,1	0,074	

11	1	0	$\frac{\ln(x^2)}{x^3}$	**12**	1	0	$\frac{\ln(x^3)}{x^2}$
	1,35	0,244			1,35	0,494	
	1,7	0,216			1,7	0,551	
	2,05	0,167			2,05	0,512	
	2,4	0,127			2,4	0,456	
	2,75	0,097			2,75	0,401	
	3,1	0,076			3,1	0,353	
13	1	0	$\frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}}$	**14**	1	0,000	$\frac{\ln^4(x)}{\sqrt{x}}$
	1,35	0,078			1,35	0,007	
	1,7	0,216			1,7	0,061	
	2,05	0,360			2,05	0,185	
	2,4	0,495			2,4	0,379	
	2,75	0,617			2,75	0,631	
	3,1	0,727			3,1	0,931	
15	1	0,000	$\frac{\ln^3(x)}{x^4}$	**16**	1	0,000	$\frac{\ln(x)}{x^4}$
	1,35	0,008			1,35	0,090	
	1,7	0,018			1,7	0,064	
	2,05	0,021			2,05	0,041	
	2,4	0,020			2,4	0,026	
	2,75	0,018			2,75	0,018	
	3,1	0,016			3,1	0,012	

Задание 5. Вычислить значения функции $f(x)$ на заданном отрезке в шести узлах при равномерном их распределении и расположении по формуле Чебышева. Провести алгебраическое интерполирование и кусочно-линейное интерполирование по полученным узлам. Оценить максимальную погрешность интерполяций по двум вариантам выбора узлов.

Вариант	$f(x)$	$[a; b]$	Вариант	$f(x)$	$[a; b]$
1	$1/(0{,}5 + x^2)$	[0; 2]	**9**	$\cos(x)+\sin(x)$	$[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$
2	$e^{-(x + \sin x)}$	[2; 5]	**10**	$\cos(x)-\sin(x)$	$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
3	$1/(1 + e^{-x})$	[0; 4]	**11**	$\sin(x)-\cos(x)$	$[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$
4	$\sin(x + e^{\cos(x)})$	[0; 3]	**12**	$2\sin(2x)-\cos(3x)$	$[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$
5	$1/(1{,}3 + x^2)$	[0; 2]	**13**	$\cos(5x)+\sin(3x)$	$[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$
6	$1+ \mathrm{e}^{-(x + \sin x)}$	[2; 5]	**14**	$\cos(4x)-\sin(2x)$	$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
7	$7/(2 + e^{-2x})$	[0; 4]	**15**	$\sin(6x)-\cos(7x)$	$[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$
8	$\cos(x + e^{\cos(x)})$	[0; 3]	**16**	$8\sin(x)-3\cos(3x)$	$[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$