

ВВЕДЕНИЕ

Навыки по решению задач способствуют более глубокому усвоению теоретического материала при изучении теории вероятностей.

Предлагаемые задания подготовлены для студентов факультета бухгалтерского учета. Больше внимание уделено задачам с практическим содержанием, в связи с этим они могут быть использованы для работы со студентами различных факультетов.

Весь материал разбит на двенадцать разделов, включающих темы теории вероятностей: “Комбинаторика”, “Вероятность. Основные формулы и теоремы” и “Случайная величина. Законы распределения случайных величин”. В каждом разделе подобрано по 32 варианта задач, а также даны дополнительные задачи повышенной трудности, которые можно предлагать студентам, увлекающимся математикой.

Таким образом, задания могут иметь широкий спектр применения в учебном процессе: для индивидуальных домашних заданий, для контрольных работ, для расчетно-графических заданий, а также для самостоятельной работы студентов.

В приложениях приведены таблицы, необходимые для решения задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. М а ц к е в и ч И.П., С в и р и д Г.П. Высшая математика: Теория вероятностей и математическая статистика. Мн.: Вышэйшая школа, 1993.
2. Г у с а к А.А. Высшая математика, том 2. Мн.: Тетра Системс, 2000.
3. З а й ц е в И.А. Высшая математика. М.: Высшая школа, 1991.
4. Г у с а к А.А., Б р и ч и к о в а Е.А. Теория вероятностей. Справочное пособие к решению задач. Мн.: Тетра Системс, 2000.

1. Комбинаторика

Л и т е р а т у р а : [4, гл. 1, § 1.3], [3, гл.11, §11.2] .

Задачи

1.1. Сколькими способами студент может выбрать в библиотеке три книги из пяти ему предложенных ?

1.2. В профком избрано 9 человек. Из них надо выбрать председателя, заместителя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

1.3. На кафедре 8 преподавателей. Сколькими способами можно составить расписание консультаций на 8 дней, если каждый преподаватель дает консультацию один раз ?

1.4. Из 12 разведчиков в разведку необходимо отправить троих. Сколькими способами можно сделать выбор?

1.5. Рассыльному поручено разнести 6 телеграмм по шести различным адресам. Сколько различных маршрутов он может выбрать?

1.6. Студенты данного курса изучают 7 учебных предметов. В расписание занятий можно поставить 3 различных предмета в день. Сколько существует способов составления расписания на этот день?

1.7. Каждая из букв П, О, Л, А, К, Н написана на одной из шести карточек, которые перемешиваются и наудачу раскладываются в ряд. Сколькими способами можно их разложить?

1.8. Сколько различных делегаций по четыре человека можно составить из группы в 15 человек?

1.9. В хозяйстве 4 бригады. Сколькими способами можно распределить по бригадам 4 бригадиров?

1.10. Студент пришел на экзамен, зная лишь 35 из 40 вопросов программы. Сколько существует способов задать студенту 3 вопроса, которых он не знает?

1.11. В коробке находятся 15 семян ржи и 10 семян пшеницы. Наудачу берут 2 зерна. Сколько существует способов взять: а) только семена ржи; б) только семена пшеницы; в) одно зерно ржи, одно – пшеницы?

1.12. Из 20 человек нужно выделить 7 для полевых работ. Сколькими способами это можно сделать?

1.13. Сколько различных четырехзначных чисел можно написать при помощи цифр 1, 2, 3, 4, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

1.14. В спортклубе 10 лыжников и 8 лыжниц. Сколькими способами можно сформировать команду из 4 лыжников и 3 лыжниц?

1.15. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал 7 различных цветов?

1.16. Сколькими способами можно расположить на книжной полке 8 различных книг?

1.17. В полуфинале первенства по шахматам участвуют 20 человек, а в финал выходят лишь трое. Каково число возможных партий полуфинала?

1.18. Дано 20 точек, никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести, соединяя точки попарно?

1.19. Студенту необходимо сдать 4 экзамена на протяжении 16 дней. Сколькими способами можно составить расписание сессии?

1.20. В партии имеется 8 изделий обычного качества и 4 высшего. Сколькими способами из партии можно выбрать 6 изделий так, чтобы 3 из них были высшего качества?

1.21. Для производственной практики студентов предоставлено 10 мест в Минскую область, 5 – в Гомельскую, 8 – в Витебскую, 9 – в Могилевскую, 7 – в Брестскую и 11 – в Гродненскую. Сколько имеется случаев, что три определенных студента попадут на практику в одну область?

1.22. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков – русского, английского, французского, немецкого, испанского – на любой другой из этих пяти языков?

1.23. На окружности отмечено 8 различных точек. Сколько различных треугольников с вершинами в данных точках можно построить?

1.24. Из 5 лучших в хозяйстве свиноматок надо выбрать трех для выставки. Сколькими способами можно сделать выбор?

1.25. Сколькими способами можно разместить 4 больных в четырехместной палате?

1.26. Найти число случаев распределения 5 пригласительных билетов среди 25 студентов.

1.27. Встретились 10 выпускников и обменялись рукопожатиями. Сколько было сделано всего рукопожатий?

1.28. 9 студентов решили обменяться фотографиями друг с другом. Сколько фотографий надо было для этого напечатать?

1.29. Агрохимик проверяет 6 видов минеральных удобрений. Ему нужно провести несколько опытов по изучению совместного влияния любой тройки удобрений. Для каждого опыта берется участок 0,25 га. На какой площади проводится все исследование?

1.30. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составлены всевозможные пятизначные числа без повторения цифр. Сколько среди них таких чисел, которые начинаются цифрой 4?

1.31. Сколькими способами можно распределить первые три премии на конкурсе, в котором принимает участие 23 человека?

1.32. Для передачи сигналов вывешиваются одно под другим три разноцветных полотнища. Сколько разных сигналов можно передать при наличии белого, желтого, красного, зеленого, черного и синего полотнищ?

Дополнительные задачи

1.33. Сколько человек участвовало в шахматном турнире, если известно, что каждый участник сыграл с остальными по одной партии, а всего было сыграно 210 партий?

1.34. Имеется 12 различных конфет. Сколькими способами можно из них составить набор, если в наборе должно быть четное число конфет?

1.35. Сколькими способами группу из 15 человек можно разделить на две группы так, чтобы в одной было 4 человека, а в другой 11?

1.36. На собрании должно выступить 5 человек А, Б, В, Г и Д. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов при условии, что А должен выступить непосредственно перед Б?

1.37. Сколько существует различных пятизначных чисел с неповторяющимися цифрами?

2. Классическое определение вероятности

Л и т е р а т у р а: [1, гл. 1,1.2], [2, гл. 28, 28.2] [4гл. 1, § 1.2.]

Задачи

2.1. Определить вероятность того, что во взятом наудачу трехзначном числе все цифры окажутся одинаковыми.

2.2. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что цифра 6 появится хотя бы на одной грани?

2.3. Из тщательно перемешанных 28 косточек домино наудачу берется одна. Какова вероятность того, что сумма очков на ней будет не менее девяти?

2.4. В урне четыре белых и пять черных шаров. Наугад вынимают два шара. Найти вероятности событий: а) оба шара белые; б) оба шара черные; в) один белый.

2.5. Из букв разрезной азбуки составлено слово «бухгалтер». Перемешаем карточки, затем, вытаскивая их наудачу, кладем в порядке вытаскивания три из них. Какова вероятность того, что при этом получится слово «луг»?

2.6. В студенческой группе 12 дружинников, среди них 5 девушек. Путем жеребьевки должны быть избраны 4 человека на дежурство. Чему равна вероятность того, что среди них окажутся все юноши?

2.7. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков: а) не больше пяти; б) не меньше 9?

2.8. В ящике 30 яблок. Из них 5 поражены болезнью в скрытой форме. Наугад берут 3 яблока. Вычислить вероятности событий:

а) 3 яблока поражены болезнью; б) только одно яблоко поражено болезнью.

2.9. В группе из 30 студентов на контрольной работе получили: оценку «отлично» – 8 студентов, оценку «хорошо» – 10 студентов, оценку «удовлетворительно» – 9 студентов, оценку «неудовлетворительно» – 3 студента. Какова вероятность того, что три студента, вызванные к доске, справились с контрольной работой?

2.10. В хозяйстве имеется 6 гусеничных и 4 колесных трактора. Для выполнения некоторой работы произвольно выбираются два трактора. Найти вероятность того, что это будут: а) гусеничные тракторы; б) колесные тракторы; в) один гусеничный, один колесный трактор.

2.11. Из разрезной азбуки, в которой имеется 33 карточки с различными буквами алфавита, вынимаются 5 карточек. Какова вероятность того, что 5 букв, расположенные в порядке появления, составят слово «рынок»?

2.12. В мастерскую для ремонта поступило 10 механических часов. Известно, что 6 из них нуждаются в общей чистке механизма. Мастер берет первые попавшиеся двое часов. Найти вероятность того, что взятые часы не нуждаются в общей чистке механизма.

2.13. В хозяйстве 5 участков земли, которые необходимо занять под 5 культур. Какова вероятность того, что произвольное закрепление культур за участками совпадает с запланированным?

2.14. На тепловой электростанции 14 сменных инженеров, из них три – женщины. В смену занято три человека. Найти вероятность того, что в случайно выбранную смену окажутся: а) все мужчины; б) все женщины.

2.15. На восьми одинаковых карточках написаны соответственно числа: 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13. Карточки перемешиваются, а затем наугад берутся две из них. Найти вероятность того, что дробь, образованная из двух взятых чисел, будет сократимой.

2.16. В партии, состоящей из 10 изделий, 4 бракованных. Для контроля берутся 3 изделия. Найти вероятность того, что: а) оба они бракованные; б) среди них одно бракованное.

2.17. Из 10 билетов лотереи 2 выигрышных. Определить вероятность того, что среди взятых наудачу трех билетов: а) нет ни одного выигрышного; б) один выигрышный.

2.18. На экзамене студенту предлагается билет, состоящий из 3 вопросов. Из 60 вопросов программы студент знает 50. Какова вероятность того, что взятый студентом билет будет состоять: а) из известных ему вопросов; б) из невыученных вопросов.

2.19. Среди 10 студентов, сидящих в первом ряду, трое не подготовлены к занятиям. Найти вероятность того, что среди 7 опрошенных студентов двое не готовы к занятиям.

2.20. Из колоды в 36 карт берутся наудачу 3 карты. Вычислить вероятность того, что среди вынутых карт будет один туз.

2.21. Библиотечка состоит из 10 различных книг, причем пять книг стоят по 4 тыс. руб. каждая, три книги – по 1 тыс. руб. и две книги – по 3 тыс. руб. Найти вероятность того, что взятые наудачу две книги стоят 5 тыс. руб.

2.22. Для производственной практики на 30 студентов предоставлено 15 мест в Могилевскую область, 8 – в Гомельскую и 7 – в Витебскую. Какова вероятность того, что два определенных студента попадут в одну область?

2.23. На десяти карточках напечатаны цифры от 1 до 9. Найти вероятность того, что три наудачу взятые и поставленные в ряд карточки составят число 197.

2.24. В мешочке 5 одинаковых кубиков, на гранях каждого из которых одна из букв: о, е, р, н, з. Найти вероятность того, что на

вынутых по одному и расположенных в одну линию кубиках можно будет прочесть слово «зерно».

2.25. В урне 5 белых и 3 черных шара. Из нее наудачу извлечены 4 шара. Какова вероятность того, что среди них окажутся 2 белых шара?

2.26. В ящике содержится 100 жетонов с номерами от 1 до 100. Определить вероятность того, что номер взятого наудачу жетона не будет делиться ни на 2, ни на 3.

2.27. В бассейне находятся 10 лещей и 15 карпов. Какова вероятность того, что три выловленные наудачу рыбы окажутся карпами?

2.28. Преподаватель вызвал через старосту на обязательную консультацию трех студентов из шести отстающих. Староста забыл фамилии вызванных студентов и послал наудачу трех отстающих студентов. Какова вероятность, что посланы вызванные студенты?

2.29. В группе из 8 спортсменов шесть мастеров спорта. Найти вероятность того, что из двух случайным образом отобранных спортсменов хотя бы один мастер спорта.

2.30. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «песня». Затем буквы перемешаны и собраны в произвольном порядке. Найти вероятность того, что снова получится слово «песня».

2.31. Из восьми книг две художественные. Найти вероятность того, что среди взятых наугад четырех книг, хотя бы одна художественная.

2.32. В магазине из 100 пар зимних сапог одного фасона 10 коричневого цвета, а остальные – черного. Произвольно отбирают 5 пар сапог. Найти вероятность того, что все выбранные сапоги – черного цвета.

Дополнительные задачи

2.33. Изготовлено 50 изделий, из которых 20% – изделия высшего сорта. Проверяются 5 изделий. Определить вероятность того, что среди них изделия высшего сорта будут составлять также 20 %.

2.34. На карточках написаны цифры 1, 2, 3, 5, 6, 7. Какова вероятность того, что при извлечении двух карточек сумма цифр будет четной?

2.35. В ящике лежат 10 заклепок, отличающихся друг от друга только материалом: 5 железных, 3 латунных и 2 медных. Наугад

берутся 2 заклепки. Какова вероятность того, что они будут из разного материала?

2.36. Десять книг расставлены на полке наудачу. Определить вероятность того, что три определенные книги окажутся поставленными вместе.

2.37. При игре в покер из колоды в 52 карты выбирают 5 карт. Найти вероятность того, что при этом получится набор карт «десятка, валет, дама, король и туз» одной масти.

3. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Л и т е р а т у р а: [2, гл.28, 28.4, 28.8-28.10,][3, гл. 11, §11.6]

Задачи

3.1. В двух отсеках зернохранилища находится посевной материал (пшеница). Семена первого отсека имеют всхожесть 80%, второго – 85%. Отбирается по одному зерну из каждого отсека. Найти вероятность того, что: а) оба зерна дадут всходы; б) одно зерно взойдет; в) хотя бы одно зерно взойдет.

3.2. В урне 10 красных, 7 синих и 3 белых шара. Найти вероятность того, что два наугад извлеченных шара одного цвета.

3.3. В читальном зале имеется 6 учебников по теории вероятностей, из которых три в переплете. Библиотекарь наудачу взял два учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из них в переплете.

3.4. Заводом послана автомашина за различными материалами на четыре базы. Вероятность наличия нужного материала на первой базе равна 0,9, на второй – 0,95, на третьей – 0,8 и на четвертой – 0,6. Найти вероятность того, что нужного материала не окажется: а) на двух базах; б) хотя бы на одной базе.

3.5. В ящике 30 яблок. Из них 3 поражены болезнью в скрытой форме. Из ящика извлекают 2 плода. Вычислить вероятность того, что поражены болезнью: а) два плода; б) один плод; в) хотя бы один плод.

3.6. Один стрелок дает 80% попаданий в цель, а другой 70%. Найти вероятность поражения цели, если оба стрелка делают по одному выстрелу. Цель считается пораженной при попадании в нее хотя бы одной из двух пуль.

3.7. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый, второй вопросы, равна 0,9, на третий – 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить хотя на два вопроса билета.

3.8. Три спортсмена должны выполнить норму мастера спорта. Вероятность того, что первый спортсмен выполнит норму, равна 0,9, второй – 0,8, третий – 0,7. Найти вероятность того, что норма мастера спорта будет выполнена: а) двумя спортсменами; б) хотя бы двумя спортсменами.

3.9. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,2, второй вызов – 0,3, третий вызов – 0,4. По условиям приема, события, состоящие в том, что данный вызов будет, независимы. Найти вероятность того, что: 1) будет принят только один вызов; 2) корреспондент вообще услышит вызов.

3.10. Завод изготавливает изделия, каждое из которых должно подвергаться четырем видам испытаний. Первое испытание изделие проходит благополучно с вероятностью 0,9, второе – 0,95, третье – 0,8 и четвертое – 0,85. Найти вероятность того, что изделие пройдет благополучно не менее двух испытаний.

3.11. На некотором предприятии 96% изделий признаются пригодными. Из каждой сотни годных изделий в среднем 75 оказываются первого сорта. Найти вероятность того, что изделие, изготовленное на этом предприятии, окажется первого сорта.

3.12. Деталь проходит три операции обработки. Вероятность того, что она окажется бракованной после первой операции, равна 0,02, после второй – 0,03, после третьей – 0,15. Найти вероятность того, что деталь будет: а) небракованной после трех операций; б) бракованной после трех операций, предполагая, что появление брака на отдельных операциях – независимые события.

3.13. В ящике 10 красных и 6 синих пуговиц. Вынимаются наудачу 3 пуговицы. Какова вероятность того, что пуговицы будут одноцветными?

3.14. В поле работают 4 комбайна. Вероятность того, что в течение смены не будет поломки в первом комбайне, равна 0,9, во втором – 0,6, в третьем – 0,7, в четвертом – 0,8. Найти вероятность того, что в течение смены поломка произойдет: 1) только в одном комбайне; 2) хотя бы в одном комбайне.

3.15. Достаточным условием сдачи студентом коллоквиума является ответ на один из двух вопросов, предлагаемых преподавателем. Студент не знает ответов на восемь вопросов из тех сорока, которые могут быть предложены. Какова вероятность сдачи коллоквиума?

3.16. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Какова вероятность того, что среди наудачу извлеченных двух деталей есть хотя бы одна стандартная?

3.17. Многолетними наблюдениями установлено, что в данном районе в сентябре 10 дней бывают дождливыми. Совхоз должен в течение первых пяти дней сентября выполнить определенную работу. Определить вероятность того, что ни один из этих дней не будет дождливым.

3.18. Процесс обработки рыбы состоит из трех последовательных операций, на каждой из которых вероятность получения бракованной продукции равна 0,02. Определить вероятность: 1) получения бракованной продукции в результате обработки рыбы; 2) неполучения бракованной продукции.

3.19. Вероятность установления в данной местности устойчивого снежного покрова с октября равна 0,1. Определить вероятность того, что в ближайшие три года в этой местности устойчивый снежный покров с октября установится: а) один раз; б) хотя бы один раз.

3.20. Какова вероятность того, что два носка, взятых наудачу из ящика (в нем шесть красных и четыре синих носка), будут одного цвета?

3.21. На переэкзаменовку пришли 7 студентов агрофака, 9 – зоофака, 6– гидрофака и 4 студента бухфака. Какова вероятность того, что 3 первых студента, взявшие билеты, окажутся студентами бухфака?

3.22. В коробке имеется 30 косынок, из них 17 светлых, остальные темные. Продавец наудачу извлекает одну за другой две косынки. Какова вероятность того, что: а) одна из косынок оказалась темной, б) обе косынки светлые?

3.23. На обувной фабрике в отдельных цехах производятся подметки, каблуки и верхи ботинок. Дефектными оказываются 0,5% каблуков, 2% подметок и 4% верхов. Произведенные каблуки, подметки и верхи случайно комбинируются в цехе, где шьются ботинки. Найти вероятность того, что изготовленная пара ботинок будет содержать дефекты.

3.24. При одном цикле обзора трех радиолокационных станций, следящих за космическим кораблем, вероятности его обнаружения соответственно равны: 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность обнаружения корабля при одном цикле: а) тремя станциями; б) не менее чем двумя станциями; в) хотя бы одной станцией.

3.25. Вычислительная машина состоит из четырех блоков. Вероятность безотказной работы в течение времени T первого блока равна 0,4, второго – 0,5, третьего – 0,6, четвертого – 0,3. Найти вероятность безотказной работы в течение времени T : а) всех блоков; б) не менее трех блоков; в) хотя бы одного блока.

3.26. При некоторых определенных условиях вероятность сбить самолет противника из первого зенитного орудия равна 0,4, из второго – 0,5. Сделано по одному выстрелу. Найти вероятность того, что: а) самолет уничтожен двумя снарядами; б) самолет поражен хотя бы одним снарядом; в) ни один снаряд не попал в цель.

3.27. Бросаются три монеты. Найти вероятность появления герба: а) два раза; б) не менее двух раз.

3.28. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9, второй – 0,9, третий – 0,8. Вычислить вероятность того, что студент сдаст: а) все экзамены; б) хотя бы 2 экзамена.

3.29. В телестудии три телевизионные камеры. Вероятности того, что в данный момент камера включена, соответственно равны: 0,9; 0,8; 0,7. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) две камеры; б) не более одной камеры; в) хотя бы одна камера.

3.30. На железобетонном заводе изготавливают панели, 90% из которых – высшего сорта. Какова вероятность того, что из трех наугад выбранных панелей высшего сорта будут: а) три панели; б) хотя бы одна панель; в) не более одной панели?

3.31. На участке кросса для мотоциклиста – гонщика имеется три препятствия. Вероятность успешного прохождения первого препятствия равна 0,4, второго – 0,5, третьего – 0,6. Найти вероятность успешного преодоления: а) двух препятствий; б) не менее двух препятствий; в) хотя бы одного препятствия.

3.32. Эффективность некоторой вакцины в формировании иммунитета составляет 75%. Вакцинировалось два животных. Найти вероятность того, что иммунитет приобретен: а) двумя животными; б) одним животным; в) хотя бы одним животным.

Дополнительные задачи

3.33. Четыре охотника договорились стрелять по дичи в определенной последовательности. Следующий охотник производит выстрел лишь в случае промаха предыдущего. Вероятности попадания в цель при одном выстреле у охотников равны соответственно: 0,8; 0,9; 0,7; 0,9. Найти вероятность того, что будет произведено:

а) один; б) два; в) три; г) четыре выстрела.

3.34. Стрелок A_1 поражает мишень при некоторых условиях стрельбы с вероятностью 0,6, стрелок A_2 – с вероятностью 0,5 и стрелок A_3 – с вероятностью 0,4. Стрелки дали залп по мишени и две пули попали в цель. Что вероятнее: попал стрелок A_3 в мишень или нет?

3.35. В урне находится 50 белых, 30 черных и 20 красных шаров. Определить вероятность того, что три извлеченных шара одинакового цвета, если: 1) извлеченный шар возвращается в урну; 2) шар в урну не возвращается; 3) шары извлекаются одновременно.

3.36. 10% рабочих не выполняют норму выработки, 50% рабочих выполняют норму до 120%, 40% рабочих выполняют норму более чем на 120%. Определить вероятность того, что: 1) взятый наудачу рабочий выполняет или перевыполняет норму выработки; 2) два наудачу взятых рабочих выполняют или перевыполняют норму выработки; 3) хотя бы один из двух рабочих не выполняет норму выработки.

3.37. Какое наименьшее число раз нужно бросить пару игральных костей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,5, утверждать, что хотя бы один раз появится 12 очков?

4. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Л и т е р а т у р а: [4, гл. 1, §1.9, 1.10], [3, гл. 11, §11.7]

Задачи

4.1. В трех корзинах находится картофель. В первой 10% поврежденных клубней, во второй – 15%, в третьей – 10%. Из наудачу выбранной корзины берут один клубень. Какова вероятность того, что клубень не поврежден?

4.2. Для участия в студенческих спортивных соревнованиях выделено из первой группы 5 студентов, из второй и третьей – соответственно 6 и 10 студентов. Вероятности выполнить норму мастера спорта соответственно равны: для студентов первой группы – 0,3, второй – 0,4, третьей – 0,2. Наугад взятый студент выполнил норму мастера спорта. Найти вероятность того, что он учится во второй группе.

4.3. В дисплейном классе имеется 10 персональных компьютеров первого типа и 15 второго типа. Вероятность того, что за время работы на компьютере первого типа не произойдет сбоя, равна 0,9, а на компьютере второго типа – 0,7. Найти вероятность того, что на случайно выбранном компьютере за время работы не произойдет сбоя.

4.4. Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит выстрел. Цель поражена. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3, для второго – 0,5, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что выстрел произведен вторым стрелком.

4.5. На наблюдательной станции установлены четыре радиолокатора различных конструкций. Вероятность обнаружения цели с помощью первого локатора равна 0,8, второго – 0,9, третьего – 0,95 и четвертого – 0,85. Цель обнаружена наугад включенным локатором. Найти вероятность того, что цель обнаружена вторым локатором.

4.6. Сборщик получил 3 коробки деталей, изготовленных заводом № 1 и 2 коробки деталей, изготовленных заводом № 2. Вероятность того, что деталь завода № 1 стандартная, равна 0,7, а завода № 2 – 0,9. Сборщик наудачу извлекает деталь из наудачу взятой коробки. Найти вероятность того, что извлечена нестандартная деталь.

4.7. Электролампы изготавливаются на трех заводах. Первый завод производит 45% общего количества электроламп, второй – 40%, третий 15%. Продукция первого завода содержит 70% стандартных ламп, второго – 80%, третьего – 81%. В магазины поступает продукция всех трех заводов. Купленная в магазине электролампа оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она изготовлена на третьем заводе.

4.8. В стройотряде 60% первокурсников и 40% студентов второго курса. Среди первокурсников 15% девушек, а среди студентов второго курса – 10% девушек. Все девушки по очереди дежурят на

кухне. Найти вероятность того, что в случайно выбранный день на кухне дежурит первокурсница.

4.9. В телевизионном ателье имеется 4 кинескопа. Вероятности того, что кинескоп выдержит гарантийный срок службы, соответственно равны 0,8; 0,85; 0,9; 0,95. Взятый наудачу кинескоп выдержал гарантийный срок. Что вероятнее, был взят второй или четвертый кинескоп?

4.10. В двух корзинах находятся яблоки. В первой 20 шт, из них 5 поврежденных, во второй – 30 шт, из них 6 поврежденных. Из наудачу выбранной корзины взято одно яблоко, которое оказалось неповрежденным. Найти вероятность того, что яблоко взято из первой корзины.

4.11. Азотное удобрение поступает на склад хозяйства из пункта 1 и пункта 2, причем из 1-го пункта в 2 раза больше, чем из 2-го. Вероятность того, что удобрение первого пункта удовлетворяет стандарту, равна 0,9, второго – 0,7. Взятое для пробы на складе хозяйства удобрение удовлетворяет стандарту. Найти вероятность того, что удобрение, взятое для пробы, поступило из пункта 2.

4.12. При передаче сообщения сигналами “точка” и “тире” эти сигналы встречаются в отношении 5:3. Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем $\frac{2}{5}$ сообщений “точка” и $\frac{1}{3}$ сообщений “тире”. Найти вероятность того, что произвольный из принятых сигналов не искажен.

4.13. Партия состоит из вентиляторов рижского и московского завода. В партии 70% вентиляторов московского завода, для которых вероятность безотказной работы за время t равна 0,95, рижского – 0,92. Прибор испытывался в течение времени t и работал безотказно. Найти вероятность того, что это вентилятор рижского завода.

4.14. Имеются два одинаковых ящика с шарами. В первом ящике 2 белых и 1 черный шар, во втором – 1 белый и 4 черных шара. Наудачу выбирают ящик и вынимают из него шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется белым?

4.15. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму такова: для лыжника – 0,9, для велосипедиста – 0,8 и для бегуна – 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит квалификационную норму.

4.16. Имеются электролампочки четырех партий, количество которых находится в отношении 3: 4: 1: 2. Вероятности того, что

взятая лампочка может гореть положенное число часов для этих партий соответственно равны: 0,22; 0,15; 0,46; 0,38. Найти вероятность того, что взятая лампочка сможет гореть положенное число часов.

4.17. Имеются три урны. В первой находятся 5 белых и 3 четных шара, во второй – 4 белых и 4 черных, в третьей – 8 белых шаров. Наугад выбирается одна урна и из нее наугад извлекается шар. Какова вероятность того, что он окажется черным?

4.18. Качество изготовленных деталей проверяется двумя контролерами, из которых первый проверяет 60%, второй – 40% деталей. Вероятность считать деталь качественной для первого контролера равна 0,94, а для второго – 0,98. Готовая деталь признана качественной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

4.19. В лаборатории имеется 6 измерительных приборов I типа и 4 – II типа. Вероятность того, что во время опыта прибор I типа не выйдет из строя, равна 0,95, для прибора II типа эта вероятность равна 0,8. Найти вероятность того, что наудачу взятый измерительный прибор не выйдет из строя до окончания опыта.

4.20. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных, во втором – 30 деталей, из них 24 стандартных, в третьем – 10 деталей, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика – стандартная.

4.21. Два стрелка независимо один от другого стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка – 0,8, для второго – 0,4. После стрельбы в мишень обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что эта пробоина принадлежит первому стрелку.

4.22. На распределительной базе находятся электролампочки, произведенные двумя заводами. Среди них 70% изготовлены первым заводом и 30% – вторым. Известно, что из каждых 100 лампочек, произведенных первым заводом, 90 удовлетворяют стандарту, а из 100 лампочек, произведенных вторым заводом, стандарту удовлетворяют 80. Определить вероятность того, что взятая наудачу с базы лампочка будет удовлетворять требованиям стандарта.

4.23. На сборку поступило 3000 деталей, изготовленных на первом станке и 2000 на втором. Первый станок дает 0,2%, а второй – 0,3% брака. Взятая деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она изготовлена на первом станке.

4.24. В канцелярии работают 4 секретарши, которые отправляют 40, 10, 30, и 20% исходящих бумаг. Вероятность неверной адресации бумаг секретаршами равна 0,01; 0,04; 0,06 и 0,01 соответственно. Найти вероятность того, что документ, неверно адресованный, отправлен третьей секретаршей.

4.25. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка составляет 0,03, а для второго – 0,02. Обработанные детали складываются в одном месте, причем первый станок обрабатывает вдвое больше деталей, чем второй. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь не будет бракованной.

4.26. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения нестандартной детали на первом автомате равна 0,075, а на втором – 0,09. Производительность второго автомата в два раза больше, чем первого. Найти вероятность того, что наугад взятая с конвейера деталь нестандартная.

4.27. При проверке качества зерен пшеницы было установлено, что все зерна могут быть разделены на 4 группы. К зернам первой группы принадлежит 96%, ко второй – 2%, к третьей – 1% и к четвертой 1% всех зерен. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен, для семян первой группы равна 0,5, для второй группы – 0,2, для третьей – 0,18 и для четвертой – 0,02. Определить вероятность того, что из взятого наудачу зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен.

4.28. Имеются на вид два одинаковых ящика с картофелем. В первом ящике находятся 70% сорта Явор и 30% сорта Невский, во втором ящике – 50% сорта Явор и 50% сорта Невский. Некто берет наугад один клубень картофеля из наудачу взятого ящика. Какова вероятность того, что клубень окажется сорта Явор?

4.29. Среди поступающих на сборку деталей с первого станка 0,1% бракованных, со второго – 0,2, с третьего – 0,25, с четвертого – 0,5%. Производительности их относятся как 4:3:2:1 соответственно. Взятая наудачу деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она изготовлена на четвертом станке.

4.30. Сборщик получил 3 ящика деталей: в первом ящике 40 деталей, из них 20 окрашенных, во втором – 50, из них 10 окрашенных, в третьем – 30, из них 15 окрашенных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика окажется окрашенной.

4.31. На фермах А и В произошла вспышка заболевания ящуром. Доли заражения скота составляют соответственно $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{4}$. Случайным образом отобранное из одной фермы животное оказалось заболевшим. Найти вероятность того, что животное выбрано из фермы А.

4.32. Три предприятия производят соответственно 25, 30 и 45% запасных частей одного наименования к доильным аппаратам, которые поступают на центральную базу. Доля брака для них составляет соответственно 1, 2 и 3%. Взятая наугад запасная часть оказалась годной. Вычислить вероятность того, что она изготовлена на втором предприятии.

Дополнительные задачи

4.33. В первой урне 2 белых и 4 черных шара, а во второй – 3 белых и 1 черный шар. Из первой урны переложили во вторую два шара. Найти вероятность того, что шар, вынутый из второй урны после перекладывания, окажется белым.

4.34. В группе из 20 стрелков имеются 4 отличных, 10 хороших и 6 посредственных стрелков. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для отличного стрелка равна 0,9, для хорошего – 0,7, для посредственного – 0,5. На линию огня вызываются наугад два стрелка. Они производят по одному выстрелу. Найти вероятность того, что стрелки попадут в цель.

4.35. Имеются три партии деталей по 20 в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 20, 15, 10. Из наудачу выбранной партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Деталь возвращают в партию и вторично наудачу извлекают деталь, которая также оказывается стандартной. Найти вероятность того, что детали были извлечены из третьей партии.

4.36. Имеются 5 урн: две из них содержат по 2 белых и 3 черных шара, две – по 1 белому и 4 черных шара и одна урна – 4 белых и 1 черный. Из одной наудачу выбранной урны взяли шар. Он оказался белым. Чему равна вероятность того, что шар вынули из урны с 4 белыми и 1 черным шаром?

4.37. Вероятность выпадения осадков в течение двух дней подряд равна 0,5, а не выпадения – 0,3. Считая, что события А (в первый день не будет осадков, а во второй будут) и В (в первый день осадки

будут, а во второй нет) равновероятны, найти безусловную вероятность того, что в течение дня осадки будут.

5. Схема повторных испытаний. Формула Бернулли

Л и т е р а т у р а: [4, гл.3, §3.1], [1, гл.3, 3.1]

Задачи

5.1. Всхожесть семян ржи составляет 90%. Чему равна вероятность того, что из 7 посеянных семян взойдут: а) не менее пяти; б) хотя бы одно.

5.2. Среди заготовок, изготавливаемых рабочим, в среднем 4% не удовлетворяют требованиям стандарта. Найти вероятность того, что среди 6 заготовок, взятых для контроля, не удовлетворяют требованиям стандарта: а) не менее четырех; б) не более пяти.

5.3. Вероятность успешной сдачи студентом каждого из пяти экзаменов оценивается в 70%. Найти вероятность успешной сдачи: а) не менее двух экзаменов; б) хотя бы одного экзамена.

5.4. В телеателье имеется 7 телевизоров. 60% из них включены в данный момент. Найти вероятность того, что в данный момент включено: а) не менее трех телевизоров; б) не более двух телевизоров.

5.5. Всхожесть семян лимона составляет 80%. Найти вероятность того, что из 9 посеянных семян взойдут: а) не более семи; б) хотя бы два.

5.6. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Какова вероятность того, что из случайно взятых в этом месяце 8 дней окажутся не дождливыми: а) не менее 5 дней; б) хотя бы один день.

5.7. У шести животных имеется заболевание, причем выздоровление наступает в 98% случаев. Найти вероятность выздоровления: а) не менее 5 животных; б) хотя бы 2 животных.

5.8. Монету бросают 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет: а) менее двух раз; б) не менее двух раз.

5.9. В мастерской имеется 8 моторов. При существующем режиме работы в данный момент с полной нагрузкой работают 70% моторов. Найти вероятность того, что в данный момент с полной нагрузкой работают: а) не менее 6 моторов; б) хотя бы 3 мотора.

5.10. В 75% расход электроэнергии в течение одних суток не превышает установленной нормы. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии не превысит нормы: а) в течение не менее 4 суток; б) в течение не более 2 суток.

5.11. Приняв вероятности рождения мальчика и девочки одинаковыми, найти вероятность того что среди 7 новорожденных будет: а) не более 4 девочек; б) хотя бы 2 девочки.

5.12. Вероятность попадания в цель при одном выстреле составляет 70%. Произведено 4 независимых выстрела. Найти вероятность попадания: а) не более двух раз; б) не менее 3 раз.

5.13. Прибор состоит из четырех узлов. Безотказная работа в течение смены каждого из них составляет 80%. Узлы выходят из строя независимо один от другого. Найти вероятность того, что за смену откажут: а) не менее двух узлов; б) не более одного узла.

5.14. В лотерее из каждых 7 билетов один выигрышный. Какова вероятность, имея 6 билетов, выиграть: а) не более, чем по одному билету; б) не менее, чем по двум билетам.

5.15. Для прядения смешаны белый и окрашенный хлопок, причем окрашенного в 2 раза больше. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наугад волокон смеси окажутся окрашенных: а) менее двух волокон; б) не менее 4 волокон.

5.16. Что вероятнее: выиграть у равносильного противника в шахматы не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми?

5.17. Для нормальной работы автобазы на линии должно быть не менее восьми машин, а имеется их десять. Количество невыхода автомашин на линию ежедневно составляет 10%. Найти вероятность того, что: а) автобаза будет работать нормально в ближайший день; б) выход машин окажется не более 2.

5.18. Применяемый метод лечения приводит к выздоровлению в 95% случаев. Найти вероятность того, что из пяти больных поправятся: а) не менее четырех, б) хотя бы один.

5.19. Статистика показывает, что 25% покупателей необходима мужская обувь 41-го размера. Найти вероятность того, что из шести покупателей обувь 41-го размера необходима: а) хотя бы 2; б) не менее чем четырем.

5.20. В куче картофеля 15% клубней, пораженных болезнью. Какова вероятность того, что среди семи взятых наугад клубней:

а) окажется пораженных не более двух; б) будет поражен хотя бы один клубень?

5.21. В урне 10 белых и 5 черных шаров. Чему равна вероятность того, что вынув наудачу с возвращением 6 шаров, получим белых: а) не менее 3; б) не более двух?

5.22. Из последовательности чисел $1, 2, \dots, 100$ выбирают наугад с возвращением 10. Чему равна вероятность того, что среди них кратных 7 будет: а) не более двух; б) хотя бы пять?

5.23. По данным ОТК, на каждую сотню металлических брусков, заготовленных для обработки, приходится 30 с зазубринами. Какова вероятность того, что из случайно взятых 8 брусков окажется без дефектов: а) не более двух; б) хотя бы семь?

5.24. В хлопке содержится 10% коротких волокон. Определить вероятность того, что среди отобранных наудачу 6 волокон окажется коротких: а) не более двух; б) хотя бы четыре.

5.25. На каждые 10 собранных яблок в среднем приходится 7 стандартных. Наугад взято 6 яблок. Найти вероятность того, что среди них окажется стандартных: а) не менее трех; б) не более пяти.

5.26. Игральная кость подброшена 7 раз. Найти вероятность появления шестерки: а) не менее 5 раз; б) не более одного раза.

5.27. Установлено, что в среднем на каждую сотню изготовленных приборов 25 имеют дефекты. Найти вероятность того, что из взятых наудачу 6 приборов окажется: а) хотя бы один с дефектами; б) не более двух с дефектами.

5.28. В некотором водоеме карпы составляют 80%. Найти вероятность того, что из 5 выловленных в этом водоеме рыб окажется: а) не менее 4 карпов; б) хотя бы один карп.

5.29. Приживаемость саженцев равна 70%. Найти вероятность того, что из 5 саженцев не приживутся: а) не более двух; б) хотя бы один.

5.30. Известно, что некто купил у каждого из 4 предприятий по одной акции. Вероятность того, что владелец акции получит дивиденды за текущий месяц, равна 0,6. Найти вероятность получения дивидендов за текущий месяц: а) хотя бы по одной акции; б) не более чем по 3 акциям.

5.31. Из пяти яиц в среднем получается 4 живых цыпленка. Найти вероятность того, что из 10 яиц получится: а) не менее 8 живых цыплят; б) хотя бы один живой цыпленок.

5.32. В магазин вошли 8 покупателей. Установлено, что 30% покупателей совершают покупку. Найти вероятность того, что из вошедших покупателей совершат покупку: а) не менее шести; б) не более двух.

Дополнительные задачи

5.33. В группе из 25 студентов 20 девушек. На каждый из трех вопросов, заданных преподавателем, ответило по одному студенту. Какова вероятность того, что среди ответивших были: а) хотя бы две девушки; б) не более одной девушки.

5.34. Три охотника одновременно выстрелили по волку. Вероятности попадания каждым из них одинаковы и равны 0,4. Определить вероятность того, что волк будет убит, если известно, что при одном попадании охотники убивают волка с вероятностью 0,2, при двух – с вероятностью 0,5, а при трех – с вероятностью 0,8.

5.35. Экзаменационный билет состоит из пяти вопросов. На каждый вопрос даны три возможных ответа, среди которых необходимо выбрать один правильный. Какова вероятность того, что методом простого угадывания удастся ответить по крайней мере на четыре вопроса?

5.36. Два шахматиста условились сыграть 10 результативных партий. Вероятность выигрыша каждой отдельной партии первым игроком равна $\frac{2}{3}$, вторым – $\frac{1}{3}$ (ничьи не считаются). Чему равны вероятности выигрыша всей игры первым игроком, вторым игроком, общего ничейного результата?

5.37. В урне 9 белых и 1 красный шар. Какова вероятность того, что при 10 извлечениях (с возвращением каждого вынутого шара) появится хотя бы один раз красный шар? Сколько раз нужно производить извлечения, чтобы вероятность получить хотя бы один раз красный шар была не меньше 0,9?

6. Локальная и интегральная теоремы Муавра–Лапласа

Л и т е р а т у р а: [4, гл. 4, § 4.3], [3, гл. 11, § 11.9.]

Задачи

6.1. Средний процент нарушения работы кинескопа телевизора в течение гарантийного срока 10%. Вычислить вероятность того, что из 20 наблюдаемых телевизоров более 18 выдержат гарантийный срок.

6.2. Установлено, что 75% саженцев данной культуры приживаются. Вычислить вероятность того что из 48 высаженных саженцев приживутся 30.

6.3. На склад поступило 30 ящиков стеклянных изделий. 90% ящиков поступают с неразбитыми изделиями. Определить вероятность того, что на склад поступит не более 10 ящиков с разбитыми изделиями.

6.4. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не менее 75 раз.

6.5. 20% деталей не проходят проверку ОТК. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей непроверенными окажется 70.

6.6. Вероятность пройти через некоторый заболоченный участок, не промочив ноги, равна 0,6. Какова вероятность того, что из 220 человек, проходивших через заболоченный участок, не промочат ноги от 120 до 133 человек? (Предполагается, что прохожие не используют опыт друг друга).

6.7. В ОТК поступила партия изделий, среди которых стандартные составляют 90%. Найти вероятность того, что из 100 проверенных изделий стандартных окажется 84.

6.8. Найти вероятность того, что переключение передач наступит 80 раз на 300 – километровой трассе, если на каждом километре этой трассы вероятность переключения передач равна 0,25.

6.9. Вероятность выхода из строя за некоторое время одного конденсатора равна 0,2. Определить вероятность того, что за некоторое время из 100 конденсаторов выйдут из строя не менее 20.

6.10. Найти вероятность того, что в партии из 800 изделий число изделий высшего сорта заключено между 600 и 700, если изделия высшего сорта составляют 62%.

6.11. Монета была подброшена 40 раз. Найти вероятность того, что герб выпадает в 25 случаях.

6.12. Найти вероятность одновременного останова 30 машин из 100 работающих, если вероятность безостановочной работы для каждой машины равна 0,8.

6.13. При штамповке клемм 98% соответствуют стандарту. Найти вероятность того, что в партии из 200 клемм не соответствуют стандарту от 70 до 80 клемм.

6.14. Изделия высшего сорта составляют 50%. Найти вероятность того, что из 1000 изделий 500 – высшего сорта.

6.15. Всхожесть семян данного растения 90%. Найти вероятность того, что из 900 высаженных семян не более 100 не взойдут.

6.16. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найти вероятность того, из 1000 рожденных детей будет не более 500 девочек.

6.17. Какова вероятность того, что в столбике из 100 наугад отобранных монет число монет, расположенных “гербом” вверх, будет от 45 до 55?

6.18. При массовом производстве шестерен брак составляет 20%. Какова вероятность того, что из 400 наугад взятых шестерен 90 будут бракованными?

6.19. Детали высшего сорта, изготовленные на данном станке, составляют 40%. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых 26 деталей половина окажется высшего сорта.

6.20. Школа принимает в первые классы 200 детей. Определить вероятность того, что среди них окажется не более 100 девочек, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.

6.21. Было посажено 400 деревьев. Найти вероятность того, что число прижившихся деревьев больше 250, если приживаемость деревьев равна 80%.

6.22. Известно, что выпуск сверл повышенной хрупкости (брак) составляет 2%. Сверла укладываются в коробки по 100 штук. Чему равна вероятность того, что в коробке число годных сверл окажется не менее 80?

6.23. Имеется 400 клубней картофеля, из которых 40 нового сорта. Производится выборка объемом 100 клубней. Определить вероятность того, что в этой выборке окажется 35 клубней нового сорта.

6.24. Всхожесть семян 80%. Найти вероятность того, что из 400 высеванных семян 70 не взойдет.

6.25. В результате проверки качества приготовленного для посева зерна было установлено, что 90% зерен всхожи. Требуется определить вероятность того, что из отобранных и высаженных 1000 зерен прорастет не менее 880 и не более 920 зерен.

6.26. На бухгалтерском факультете данного вуза девушки составляют 85%. Найти вероятность того, что из 700 студентов этого факультета юноши составляют не более 200 студентов.

6.27. 90% выпуска радиоламп бывает годными. Определить вероятность того, что в партии из 500 штук находится 15 бракованных ламп.

6.28. По данным длительной проверки качества выпускаемых запчастей брак составляют 13%. Определить вероятность того, что в непроверенной партии из 150 запчастей пригодных будет не менее 125 и не более 135.

6.29. Игральную кость подбрасывают 800 раз. Какова вероятность того, что число очков, кратное трем, выпадет не меньше 260 и не больше 274 раз?

6.30. На керамическом заводе 90% тарелок выпускается продукцией первого сорта. ОТК завода должен проверить партию из 600 изготовленных тарелок. Найти вероятность того, что 540 из них окажется первосортных.

6.31. Посажено 600 семян кукурузы, имеющих всхожесть 90%. Найти вероятность того, что 65 из них не взойдут.

6.32. Установлено, что 75% передаваемых сигналов оказываются принятыми. Найти вероятность того, что из 100 передаваемых сигналов будет принято от 71 до 80.

Дополнительные задачи

6.33. Игральную кость подбрасывают 800 раз. Какова вероятность того, что число очков, кратное трем, выпадет не меньше 260 и не больше 274 раз?

6.34. Вероятность изготовления годной детали на токарном станке равна 0,9. Сколько нужно обработать деталей, чтобы с вероятностью 0,98 можно было ожидать, что не менее 150 деталей будут годными?

6.35. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что событие А появится не менее 75 раз?

6.36. В каждой из 1000 колод по 36 карт. Из каждой колоды вынимают наудачу две карты. Чему равна вероятность того, что число пар хотя бы с одним тузом заключено между 100 и 200?

6.37. В ящике 10 револьверов одной системы и одинаковых по виду, из них 4 не пристрелянных. Вероятность попадания в цель из не пристрелянного револьвера равна 0,3, а из пристрелянного – 0,9. Из взятого наудачу револьвера произведено 200 выстрелов по цели. Чему равна вероятность того, что число попаданий в цель заключено между 120 и 150?

7.Формула Пуассона. Простейший поток событий

Л и т е р а т у р а: [4,гл3, §3.3], [3, гл.12, §12.4].

Задачи

7.1. Среди семян пшеницы 0,6% сорняков. Какова вероятность того, что при случайном отборе 1000 семян окажется не более 6 семян сорняков?

7.2. В течение года град приносит значительный ущерб примерно одному хозяйству из 50. Определить вероятность того, что из 400 хозяйств пострадает не более 6.

7.3. Пряжильница обслуживает 1000 веретен. 0,4% составляет обрыв нити на одном веретене в течение одной минуты. Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв нити будет не менее чем в 5 веретенах.

7.4. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. 0,02% изделий повреждается в пути. Найти вероятность того, что на базу поступит не более трех негодных изделий.

7.5. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найти вероятность того, что при 5000 выстрелов будет хотя бы два попадания в цель.

7.6. В среднем на 1 м^2 площади посева встречается 0,25 стебля сорняков. Определить вероятность того, что на 4 м^2 : 1) не окажется ни одного сорняка; 2) окажется не более двух сорняков.

7.7. В магазин поступило 1000 бутылок минеральной воды. При перевозке оказывается разбитых 0,3% бутылок. Найти вероятность того, что магазин получит не более трех разбитых бутылок.

7.8. В порт в течение суток прибывают три корабля. Какова вероятность того, что в течение пяти часов в порт придут хотя бы 4 корабля?

7.9. На каждую тысячу семян некоторой культуры приходится в среднем 8 семян сорняков. Какова вероятность того, что среди взятых 200 семян окажется не менее трех семян сорняков?

7.10. Некоторый аэропорт принимает в среднем в час 3 самолета. Какова вероятность того, что этот аэропорт в течение двух часов примет: а) более пяти самолетов; б) хотя бы один самолет?

7.11. Счетчик Гейгера регистрирует 0,01% частиц, вылетающие из некоторого радиоактивного источника. Предположим, что за время наблюдения из источника вылетело 30000 частиц. Какова вероятность, что счетчик зарегистрирует: а) более 10 частиц; б) хотя бы одну частицу?

7.12. Установлено, что брак при производстве деталей составляет 0,8%. Найти вероятность того, что из взятых на проверку 1000 деталей не более 10 бракованных.

7.13. Число машин, прибывающих в автопарк за 2 минуты, равно четырем. Найти вероятность того, что за 4 минуты прибудет не более семи машин.

7.14. Аппаратура состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа одного элемента за время T равна 0,002 и не зависит от работы других элементов. Найти вероятность того, что за время T откажет не менее трех элементов.

7.15. Число вызовов, поступающих на АТС за 2 минуты, равно 4. Найти вероятность того, что за 3 минуты поступит не менее 6 вызовов.

7.16. Телевизионная установка содержит 2000 транзисторов, каждый из которых выходит из строя в 0,06% случаев. Найти вероятность того, что из строя выйдут хотя бы 3 транзистора.

7.17. В аэропорт за 3 минуты прибывает 6 самолетов. Найти вероятность того, что за 4 минуты прибудет не менее 8 самолетов.

7.18. Телефонная станция обслуживает 400 абонентов. 1% абонентов могут в течение часа позвонить на станцию. Найти вероятность того, что в течение часа на станцию позвонят не более 6 абонентов.

7.19. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту равно 5. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит не менее четырех вызовов.

7.20. В 0,1% случаев возможна опечатка на странице машинописного текста. Имеется рукопись объемом 1000 страниц

машинописного текста. Найти вероятность того, что взятая наудачу страница содержит не более пяти опечаток.

7.21. Коммутатор учреждения обслуживает 500 абонентов. 0,2% абонентов могут позвонить в течение одной минуты на коммутатор. Какое из событий вероятнее: в течение одной минуты позвонит 4 абонента или позвонят не более трех абонентов?

7.22. В течение рабочего дня (7ч.) в парикмахерскую в среднем обращаются 35 клиентов. Какова вероятность того, что в течение определенного часа в парикмахерскую обратятся не более шести клиентов?

7.23. Всхожесть семян кукурузы равна 95%. Найти вероятность того, что при посеве 200 семян не взойдут не более пяти.

7.24. На склад сельхозтехники в среднем в течение года (250 рабочих дней) поступает 1500 заявок на получение запасных частей. Определить вероятность того, что в течение определенного рабочего дня на склад поступит не менее семи заявок.

7.25. При изготовлении тракторных деталей нестандартные составляют 0,4%. Найти вероятность того, что в партии из 1000 деталей нестандартных окажется от пяти до восьми.

7.26. Среднее число сорняков среди семян некоторой культуры, высеваемых на 1 м^2 , равно четырем. Определить вероятность того, что на площади 2 м^2 , выбранной наудачу, число семян сорняков составит не более 7.

7.27. Зараженность семян вредителями равна 0,2%. Найти вероятность того, что из 1000 зерен окажется зараженных вредителями от трех до шести семян.

7.28. Среднее число вызовов техпомощи в течение рабочей недели (5 рабочих дней) равно 20. Найти вероятность того, что в течение рабочего дня техпомощь будет вызываться не более пяти раз.

7.29. Известно, что на опытном поле у 2% кустов картофеля стебли поражены фитофторой. Найти вероятность того, что из 300 кустов картофеля этого поля фитофторой будут поражены не более 4 кустов.

7.30. В радиоаппаратуре за 10 000 часов непрерывной работы происходит в среднем смена 10 ламп. Найти вероятность выхода из строя радиоаппаратуры (смена хотя бы одной лампы) за 200 часов непрерывной работы.

7.31. На каждую 1000 семян некоторой культуры приходится в среднем 10 семян сорняка. Найти вероятность того, что среди

наудачу взятых 200 семян этой культуры окажется не более 5 семян сорняка.

7.32. 3 % коров данной фермы имеют среднегодовой удой свыше 5000 кг. Какова вероятность того, что из 300 коров фермы не менее 7 коров дадут за год более чем по 5000 кг молока?

Дополнительные задачи

7.33. Средняя плотность болезнетворных бактерий в 1 м^3 воздуха равна 100. Берется на пробу 2 дм^3 воздуха. Найти вероятность того, что в нем будет обнаружено хотя бы 5 бактерий.

7.34. Среднее число отказов радиоаппаратуры за 1000 часов работы равно 5. Определить вероятность хотя бы одного отказа радиоаппаратуры за 20 часов работы.

7.35. Найти среднее число опечаток на странице рукописи, если вероятность того, что страница рукописи содержит хотя бы одну опечатку, равна 0,95. Предполагается, что число опечаток распределено по закону Пуассона.

7.36. Проверкой качества изготавливаемых на заводе часов установлено, что в среднем 98% их отвечают предъявляемым требованиям, а 2% нуждаются в дополнительной регулировке. Приемщик проверяет качество 300 изготавливаемых часов. Если при этом среди них обнаружится 11 или более часов, нуждающихся в дополнительной регулировке, вся партия возвращается заводу для доработки. Найти вероятность того, что партия часов будет принята.

7.37. При обследовании двух групп мужчин и женщин по 300 человек было установлено, что среди мужчин 5% дальтоников, а среди женщин – 0,25% . Найти вероятность того, что выбранные наудачу три лица из наугад взятой группы страдают дальтонизмом.

8. Дискретная случайная величина. Закон распределения Числовые характеристики

Л и т е р а т у р а : [1, гл. 2, §2.1, 2.2, 2.6, 2.9; гл.3, §3.1, 3.3, 3.4], [3, гл.12, §12.1, 12.2, 12.3,12.4,12.5],[4, гл.2, §2.1, 2.2, 2.4, 2.5].

Задачи

8.1. В зерне, предназначенном для чистки, 10% сорняков. Наудачу отобраны 5 зерен. Написать закон распределения СВ X – числа сорняков среди 5 отобранных. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.2. В денежной лотерее на 100 билетов разыгрывается один выигрыш в 20р., два выигрыша по 10р. и 10 выигрышей по 1р. Составить закон распределения СВ X – возможного выигрыша на один билет. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.3. Партия из 8 изделий содержит 5 стандартных. Наудачу отбирают 4 изделия. Составить закон распределения СВ X – числа стандартных изделий среди отобранных. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.4. Банк выдает 5 кредитов. Вероятность невозврата кредита равна 0,2 для каждого из заемщиков. Составить закон распределения СВ X – количества заемщиков, не вернувших кредит по окончании срока. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.5. Производится 4 независимых испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,6. Составить закон распределения СВ X – числа появлений события A в указанных испытаниях. Составить функцию распределения $F(x)$ и построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.6. На пути движения автомобиля четыре светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает автомашине дальнейшее движение. Составить закон распределения СВ X – числа светофоров, пройденных автомашиной без остановки. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$, и $\sigma(X)$.

8.7. Две игральные кости одновременно бросают два раза. Написать закон распределения СВ X – числа выпадений нечетного числа очков на двух игральные костях. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.8. В партии из 10 деталей имеется 7 стандартных. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения СВ X – числа стандартных деталей среди отобранных. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.9. В партии из шести деталей имеется четыре стандартных. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения СВ X

– числа стандартных деталей среди отобранных. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.10. В партии деталей 10% нестандартных. Наудачу отобраны 4 детали. Написать закон распределения СВ X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.11. Баскетболист производит четыре броска по корзине. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,6. Написать закон распределения СВ X – числа попаданий мячом в корзину. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.12. Из партии в 25 изделий, среди которых имеются 6 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Написать закон распределения СВ X – числа бракованных изделий, содержащихся в выборке. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.13. Вероятность сдачи данного экзамена для каждого из пяти студентов равна 0,9. Написать закон распределения СВ X – числа студентов, сдавших экзамен. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.14. Вероятность успешной сдачи первого экзамена для данного студента равна 0,9, второго экзамена – 0,8, третьего – 0,75. Написать закон распределения СВ X – числа сданных экзаменов. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.15. Некоторое предприятие выпускает $1/3$ своих изделий высшим сортом, $2/3$ первым сортом. Наугад взято четыре изделия. Написать закон распределения СВ X – числа изделий высшего сорта из взятых четырех. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.16. Батарея состоит из трех орудий. Вероятности попадания в цель при одном выстреле из первого, второго и третьего орудий батареи равны соответственно 0,5; 0,7; 0,8. Написать закон распределения СВ – X – числа попаданий в мишень при одном залпе. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.17. Два стрелка производят выстрелы по мишени. Первый стрелок производит два выстрела, второй три. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле соответственно равны 0,9 и 0,8.

Написать закон распределения СВ X – числа попаданий в мишень. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.18. Из 20 приборов, испытываемых на надежность, 5 высшей категории. Наугад взяли 4 прибора. Написать закон распределения СВ X – числа приборов высшей категории среди отобранных. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.19. Среди панелей, изготовленных на железобетонном заводе, 90% высшего сорта. Наудачу взято пять панелей. Написать закон распределения СВ X – числа панелей высшего сорта среди отобранных. Составить функцию распределения и построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.20. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность выхода из строя в течение смены для первого станка 0,5, для второго – 0,4, для третьего – 0,6. Написать закон распределения СВ X – числа станков вышедших из строя в течение смены. Составить функцию распределения и построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.21. СВ X – сумма очков три двух бросания игральной кости. Написать закон распределения СВ X . Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.22. В магазине имеются 10 телевизоров, из которых 4 дефектные. Пусть X – случайная величина – число исправных телевизоров среди трех отобранных. Написать закон распределения СВ X . Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.23. В магазин поступила обувь из двух фабрик в соотношении 2:3. Куплено 4 пары обуви. Найти закон распределения СВ X – числа купленных пар обуви, изготовленных первой фабрикой. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.24. Для рекламы фирма вкладывает в каждую 10-ю единицу продукции приз в 1000 руб. Пусть X – случайная величина – размер выигрыша при 5 сделанных покупках. Написать закон распределения СВ X . Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.25. В экзаменационном билете 3 задачи. Вероятность правильного решения студентом первой задачи равна 0,8, второй – 0,6, третьей – 0,4. Написать закон распределения СВ X – числа

правильно решенных задач. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.26. В урне три белых и пять черных шаров. Из урны извлекают три шара. Пусть СВ X – число вынутых черных шаров. Написать закон распределения СВ X . Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.27. Всхожесть семян ржи составляет 90%. Посажено 4 зерна. Написать закон распределения СВ X – числа семян, давших всходы. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.28. Охотник, имеющий пять патронов, стреляет в цель до первого попадания (или пока не израсходует все патроны). Написать закон распределения СВ X – числа израсходованных патронов. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.29. Партия, насчитывающая 50 изделий, содержит 6 бракованных. Из всей партии случайным образом выбрано 5 изделий. Написать закон распределения СВ X – числа бракованных изделий среди отобранных. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.30. В цехе работают 7 мужчин и 5 женщин. По табельным номерам наудачу отобраны 4 человека. Написать закон распределения СВ

X – числа женщин среди случайно отобранных. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.31. На пути движения автомобиля шесть светофоров, каждый из них либо разрешает, либо запрещает дальнейшее движение автомобиля с вероятностью 0,5. Написать закон распределения СВ X – числа светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.32. Два орудия ведут стрельбу по цели, делая по два выстрела. Вероятности попадания в цель при одном выстреле для первого орудия 0,6, для второго – 0,8. Написать закон распределения СВ X – общего числа попаданий в цель. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

Дополнительные задачи

8.33. В урне 4 шара с номерами 1, 2, 3, 4. Вынимают два шара. Изучают СВ X – сумму номеров шаров. Написать закон распределения СВ X . Составить функцию распределения $F(x)$ и построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.34. Известно, что некто купил две акции предприятия А и три акции предприятия В. Вероятность того, что за текущий месяц владелец акций получит дивиденды по каждой акции, равна 0,5 и 0,6 соответственно для предприятий А и В. Написать закон распределения СВ X – числа акций, по которым владелец получит дивиденды. Составить функцию распределения $F(x)$ и построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.35. Бросают три монеты. Написать закон распределения СВ X – числа выпадений герба. Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

8.36. Из урны, содержащей пять белых и три черных шара, последовательно вынимают шары, причем операция извлечения продолжается до появления белого шара. Написать закон распределения СВ X – числа извлеченных черных шаров. Составить функцию распределения $F(x)$ и построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. Рассмотреть два случая: а) вынутые шары в урну не возвращаются; б) вынутые шары возвращаются в урну.

8.37. Монету бросают шесть раз. Изучают СВ X – отношение числа появлений герба к числу появлений цифры. Написать закон распределения СВ X . Составить функцию распределения $F(x)$, построить ее график. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$.

9, 10. Непрерывная случайная величина. Функция распределения. Плотность вероятности

Л и т е р а т у р а: [1, гл.2, §2.3, 2.7, 2.8, 2.9, гл.3, §3.4, 3.5, 3.6], [3, гл.12, §12.5, 12.6, 12.7], [4, гл.2, §2.2, 2.3, 2.4, 2.5].

Задачи

Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. В задачах 9.1 – 9.32 требуется:

- а) найти плотность распределения вероятностей $f(x)$;
 б) найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$;
 в) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$;
 г) найти вероятность попадания СВ X в интервал $(a; b)$.

$$1. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < \frac{3\pi}{4}, \\ \cos 2x, & \text{если } \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi, \\ 1, & \text{если } x > \pi; \end{cases} \quad a = \frac{3\pi}{4}; b = \frac{5\pi}{6}.$$

$$9.2. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{1}{24}(x^2 + 2x), & \text{если } 0 \leq x \leq 4, \\ 1, & \text{если } x > 4; \end{cases} \quad a = 0; b = 1.$$

$$9.3. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -1, \\ \frac{1}{9}(x+1)^2, & \text{если } -1 \leq x \leq 2, \\ 1, & \text{если } x > 2; \end{cases} \quad a = 1; b = 2.$$

$$9.4. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{x^2}{100}, & \text{если } 0 \leq x \leq 10, \\ 1, & \text{если } x > 10; \end{cases} \quad a = 5; b = 10.$$

$$9.5. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1, \\ \frac{1}{2}(x-1), & \text{если } 1 \leq x \leq 3, \\ 1, & \text{если } x > 3; \end{cases} \quad a = 2; b = 3.$$

$$9.6. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < \frac{\pi}{2}, \\ 1 - \sin x, & \text{если } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \\ 1, & \text{если } x > \pi; \end{cases} \quad a = \frac{\pi}{2}; b = \frac{3\pi}{4}.$$

$$9.7. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{x^2}{9}, & \text{если } 0 \leq x \leq 3, \\ 1, & \text{если } x > 3; \end{cases} \quad a = 0; b = 1.$$

$$9.8. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{1}{33}(3x^2 + 2x), & \text{если } 0 \leq x \leq 3, \\ 1, & \text{если } x > 3; \end{cases} \quad a = 0; b = 2.$$

$$9.9. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{x^2}{49}, & \text{если } 0 \leq x \leq 7, \\ 1, & \text{если } x > 7; \end{cases} \quad a = 6; b = 7.$$

$$9.10. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < \frac{3\pi}{2}, \\ \cos x, & \text{если } \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi, \\ 1, & \text{если } x > 2\pi; \end{cases} \quad a = \frac{3\pi}{2}; b = \frac{7\pi}{4}.$$

$$9.11. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{x}{3}, & \text{если } 0 \leq x \leq 3, \\ 1, & \text{если } x > 3; \end{cases} \quad a = 1; b = 2.$$

$$9.12. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \sin x, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{если } x > \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad a = \frac{\pi}{6}; b = \frac{\pi}{3}.$$

$$9.13. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{1}{15}(x^2 + 2x), & \text{если } 0 \leq x \leq 3, \\ 1, & \text{если } x > 3; \quad a = 0; b = 2. \end{cases}$$

$$9.14. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{1}{2}(x^2 - x), & \text{если } 0 \leq x \leq 2, \\ 1, & \text{если } x > 2; \quad a = 0; b = 1. \end{cases}$$

$$9.15. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{x}{5}, & \text{если } 0 \leq x \leq 5, \\ 1, & \text{если } x > 5; \quad a = 3; b = 4. \end{cases}$$

$$9.16. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{1}{6}(x^2 + x), & \text{если } 0 \leq x \leq 2, \\ 1, & \text{если } x > 2; \quad a = 0; b = 1. \end{cases}$$

$$9.17. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{x}{4}, & \text{если } 0 \leq x \leq 4, \\ 1, & \text{если } x > 4; \quad a = 2; b = 3. \end{cases}$$

$$9.18. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -2, \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2}, & \text{если } -2 \leq x \leq 2, \\ 1, & \text{если } x > 2; \quad a = -1; b = 1. \end{cases}$$

$$9.19. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 2, \\ \frac{1}{2}x - 1, & \text{если } 2 \leq x \leq 4, \\ 1, & \text{если } x > 4; \quad a = 3; b = 4. \end{cases}$$

$$9.20. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -1, \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}, & \text{если } -1 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ 1, & \text{если } x > \frac{1}{3}; \end{cases} \quad a = 0; b = \frac{1}{2}.$$

$$9.21. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{1}{6}x, & \text{если } 0 \leq x \leq 6, \\ 1, & \text{если } x > 6; \end{cases} \quad a = 2; b = 5.$$

$$9.22. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -1, \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, & \text{если } -1 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{если } x > 1; \end{cases} \quad a = -\frac{1}{2}; b = \frac{1}{2}.$$

$$9.23. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{x}{9}, & \text{если } 0 \leq x \leq 9, \\ 1, & \text{если } x > 9; \end{cases} \quad a = 3; b = 5.$$

$$9.24. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 2, \\ (x-2)^2, & \text{если } 2 \leq x \leq 3, \\ 1, & \text{если } x > 3; \end{cases} \quad a = 2,5; b = 2,8.$$

$$9.25. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{x^2}{25}, & \text{если } 0 \leq x \leq 5, \\ 1, & \text{если } x > 5; \end{cases} \quad a = 4; b = 5.$$

$$9.26. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < \frac{\pi}{2}, \\ -\cos x, & \text{если } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \\ 1, & \text{если } x > \pi; \end{cases} \quad a = \frac{\pi}{2}; b = \frac{5}{6}\pi.$$

$$9.27. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{x^2}{16}, & \text{если } 0 \leq x \leq 4 \\ 1, & \text{если } x > 4; \end{cases} \quad a = 2; b = 3.$$

$$9.28. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{x^2}{2}, & \text{если } 0 \leq x \leq \sqrt{2}, \\ 1, & \text{если } x > \sqrt{2}; \end{cases} \quad a = 0; b = 1.$$

$$9.29. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x), & \text{если } 0 \leq x \leq \pi, \\ 1, & \text{если } x > \pi; \end{cases} \quad a = \frac{\pi}{3}; b = \frac{\pi}{2}.$$

$$9.30. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1, \\ \frac{1}{4}(x - 1), & \text{если } 1 \leq x \leq 5, \\ 1, & \text{если } x > 5; \end{cases} \quad a = 2; b = 4.$$

$$9.31. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -\frac{\pi}{4}, \\ \frac{1}{2}(1 + \sin 2x), & \text{если } -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 1, & \text{если } x > \frac{\pi}{4}; \end{cases} \quad a = 0; b = \frac{\pi}{6}.$$

$$9.32. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1, \\ \frac{1}{4}(x^3 - 2x), & \text{если } 1 \leq x \leq 2, \\ 1, & \text{если } x > 2; \end{cases} \quad a = 1, 2; b = 1, 5.$$

Дополнительные задачи

- 9.33. Точку бросают наудачу внутрь круга радиуса R . Вероятность ее попадания в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади этой области. Найти функцию распределения расстояния точки до центра круга.
- 9.34. Время, необходимое для устранения неисправностей в телевизорах, есть случайная величина T . Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение времени обслуживания телевизоров, если функция распределения есть

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq 0, \\ 1 - e^{-kt}, & \text{если } t > 0 \ (k > 0). \end{cases}$$

- 9.35. Точку бросают наудачу внутрь шара радиуса R . Вероятность попадания в любую область, расположенную внутри шара, пропорциональна объему этой области. Найти функцию распределения, плотность вероятности, математическое ожидание и дисперсию расстояния точки до центра шара.
- 9.36. Функция распределения случайной величины X задана графиком (рис.1). Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию СВ X .

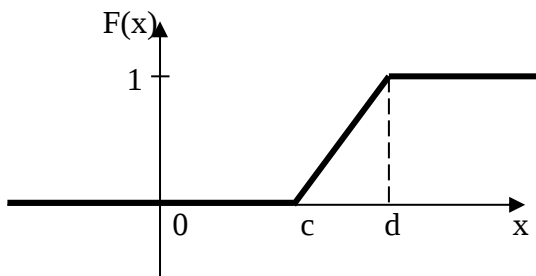


Рис. 1.

9.37. Функция распределения случайной величины X (распределение Коши) задана формулой $F(x) = A + B \operatorname{arctg} x$, где $-\infty < x < \infty$. Найти: а) постоянные A и B ; б) плотность вероятности $f(x)$; в) вероятность того, что СВ X попадет в отрезок $[-1; 1]$.

Случайная величина X задана функцией плотности вероятности $f(x)$. В задачах 10.1–10.32 требуется

- а) найти значение константы c ;
- б) найти функцию распределения $F(x)$;
- в) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;
- г) найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$;
- д) найти вероятность попадания СВ X в интервал $(a; b)$.

$$10.1. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ cx^2, & \text{если } 0 \leq x \leq 10, \\ 0, & \text{если } x > 10; \end{cases} \quad a = 1, b = 4.$$

$$10.2. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ c \cos x, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{если } x > \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad a = 0, b = \frac{\pi}{4}.$$

$$10.3. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1, \\ cx, & \text{если } 1 \leq x \leq 7, \\ 0, & \text{если } x > 7; \end{cases} \quad a = 2, b = 5.$$

$$10.4. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ c(2x + 1), & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ 0, & \text{если } x > \frac{1}{3}; \end{cases} \quad a = 0, b = \frac{1}{6}.$$

$$10.5. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < \frac{\pi}{6}, \\ -3c \sin 3x, & \text{если } \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}, \\ 0, & \text{если } x > \frac{\pi}{3}; \end{cases} \quad a = 1, b = 2.$$

$$10.6. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ 4cx^3, & \text{если } 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{если } x > 2; \end{cases} \quad a = 0, b = 1.$$

$$10.7. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ 4c \sin 4x, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}, \\ 0, & \text{если } x > \frac{\pi}{6}; \end{cases} \quad a = \frac{\pi}{12}, b = \frac{\pi}{8}.$$

$$10.8. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1, \\ \frac{(4-x)^2}{c}, & \text{если } 1 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{если } x > 3; \end{cases} \quad a = 2, b = 3.$$

$$10.9. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ c(3x^2 + 1), & \text{если } 0 < x \leq \frac{1}{3}, \\ 0, & \text{если } x > \frac{1}{3}; \end{cases} \quad a = \frac{1}{8}, b = \frac{1}{6}.$$

$$10.10. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}c, & \text{если } |x-2| \leq 2, \\ 0, & \text{если } |x-2| > 2; \end{cases} \quad a = 0, b = 2.$$

$$10.11. f(x) = \begin{cases} 4c, & \text{если } |x-2| \leq 3, \\ 0, & \text{если } |x-2| > 3; \end{cases} \quad a = 1, b = 3.$$

$$10.12. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ -c \sin x, & \text{если } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0, \\ 0, & \text{если } x > 0; \end{cases} \quad a = \frac{\pi}{4}, b = 0.$$

$$10.13. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 3, \\ \frac{x-3}{c}, & \text{если } 3 \leq x \leq 5, \\ 0, & \text{если } x > 5; \end{cases} \quad a = 4, b = 4, 5.$$

$$10.14. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{\sin 2x}{c}, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{если } x > \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad a = \frac{\pi}{6}, b = \frac{\pi}{3}.$$

$$10.15. f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^3}, & \text{если } x \geq 1, \\ 0, & \text{если } x < 1; \end{cases} \quad a = 1, b = 3.$$

$$10.16. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq \frac{3}{4}\pi, \\ -2c \sin 2x, & \text{если } \frac{3}{4}\pi < x \leq \pi, \\ 0, & \text{если } x > \pi; \end{cases} \quad a = \frac{7}{8}\pi, b = \pi.$$

$$10.17. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -\frac{\pi}{4}, \\ \frac{\cos 2x}{c}, & \text{если } -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 0, & \text{если } x > \frac{\pi}{4}; \end{cases} \quad a = -\frac{\pi}{3}; b = \frac{\pi}{6}.$$

$$10.18. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -0,5, \\ c - x, & \text{если } -0,5 \leq x \leq 0,5, \\ 0, & \text{если } x > 0,5; \end{cases} \quad a = 0, b = 1.$$

$$10.19. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ cx^2, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{если } x > 1; \end{cases} \quad a = 0, b = \frac{1}{4}.$$

$$10.20. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ c \sin x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \text{если } x > \pi; \end{cases} \quad a = \frac{\pi}{6}, b = \frac{\pi}{2}.$$

$$10.21. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -\frac{\pi}{2}, \\ c \cos x, & \text{если } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{если } x > \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad a = 0, b = \frac{\pi}{4}.$$

$$10.22. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ c(3x - 2), & \text{если } 0 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{если } x > 4; \end{cases} \quad a = 2, b = \frac{5}{2}.$$

$$10.23. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ 3c \cos 3x, & \text{если } \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}, \\ 0, & \text{если } x > \frac{\pi}{3}; \end{cases} \quad a = \frac{\pi}{4}, b = \frac{\pi}{3}.$$

$$10.24. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ c(x^2 - 1), & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{если } x > 1; \end{cases} \quad a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{4}.$$

$$10.25. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 4, \\ \frac{x-4}{c}, & \text{если } 4 \leq x \leq 6, \\ 0, & \text{если } x > 6; \end{cases} \quad a = 3, b = 5.$$

$$10.26. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{x^3}{c}, & \text{если } 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{если } x > 2; \end{cases} \quad a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}.$$

$$10.27. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 1, \\ c(2-x^2), & \text{если } 1 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{если } x > 4; \end{cases} \quad a = 2, b = 3.$$

$$10.28. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ c(1-3x), & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{если } x > 1; \end{cases} \quad a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{4}.$$

$$10.29. f(x) = \begin{cases} \pi \cdot \frac{c}{(1+x^2)}, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0; \end{cases} \quad a = 1, b = 3.$$

$$10.30. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ \frac{3}{2}x^2, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ c(2-x)^2, & \text{если } 1 < x < 2, \\ 0, & \text{если } x \geq 2; \end{cases} \quad a = 1, b = 2.$$

$$10.31. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ ce^{\alpha x}, & \text{если } 0 \leq x (\alpha > 0); \end{cases} \quad a = 1; b = 2.$$

$$10.32. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ ce^{-2x}, & \text{если } x \geq 0; \end{cases} \quad a-1, b=2.$$

Дополнительные задачи

- 10.33. Плотность распределения вероятности случайной величины равна $f(x) = ax^2e^{-kx}$, $k > 0$, $0 \leq x < \infty$. Найти: а) коэффициент a ; б) функцию распределения случайной величины $F(x)$; в) вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал $(0; \frac{1}{k})$.
- 10.34. График плотности распределения вероятностей случайной величины X изображен на рис. 2. Записать аналитическое выражение для плотности вероятностей, найти функцию распределения, вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

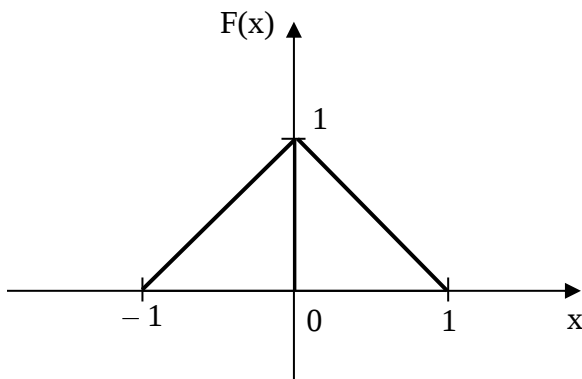


Рис. 2.

- 10.35. Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x)$, причем $f(x) = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, если $|x| < a$; $f(x) = 0$, если $|x| \geq a$. Нужно: 1) найти коэффициент a ; 2) построить график распределения плотности вероятностей $f(x)$; 3) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $(a/2; a)$.

- 10.36. Случайная величина X распределена по закону Рэлея с плотностью вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & \text{если } x > 0 \ (\sigma > 0), \\ 0, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

Найти функцию распределения случайной величины X .

- 10.37. Модуль вектора скорости молекулы газа есть случайная величина, распределенная по закону Максвелла с плотностью вероятностей

$$f(V) = \begin{cases} \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} V^2 e^{-h^2 V^2}, & \text{если } V > 0, \\ 0, & \text{если } V < 0. \end{cases}$$

Найти среднюю скорость и дисперсию величины скорости молекулы.

11. Нормальное распределение.

Л и т е р а т у р а: [1, гл.3, § 3.7, 3.8, 3.9], [3, гл.12, § 12.8, 12.9], [4, гл.3, §3.5].

- 11.1. При изготовлении некоторого изделия его вес X подвержен случайным колебаниям. Стандартный вес изделия равен 30г, его среднее квадратическое отклонение равно 0,7, а случайная величина X распределена по нормальному закону. Найти: 1) вероятность того, что вес наудачу выбранного изделия находится в пределах от 28 до 31 г; 2) величину, которую не превысит вес наудачу взятого изделия с вероятностью 0,95.
- 11.2. На станке изготавливаются втулки. Длина втулки представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону, имеющую среднее значение 20 см и дисперсию 0,04 см². Найти: 1) процент втулок, длина которых заключена между 19,7 и 20,3 см; 2) величину, которую не превысит длина наудачу взятой втулки с вероятностью 0,95.
- 11.3. Из некоторого пункта ведется стрельба из орудия вдоль некоторой прямой по цели. Дальность полета снаряда имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 1000 м и средним квадратическим отклонением 50 м. Найти: 1) процент снарядов, которые дадут перелет от 40 до 60 м; 2) процент снарядов, которые пролетят расстояние, меньшее средней дальности.
- 11.4. Считается, что отклонение длины изготавливаемых деталей от стандартных является случайной величиной распределенной по нормальному закону. Зная, что длина стандартной детали 40 см, а среднее квадратическое отклонение 0,4 см, найти: 1) процент деталей, длина которых заключена в промежутке (39,8; 40,2 см); величину, которую не превысит длина наудачу взятой детали с вероятностью 0,9.

- 11.5. Случайные значения веса зерна распределены нормально. Математическое ожидание веса зерна равно 0,15 г, среднее квадратическое отклонение равно 0,03 г. Нормальные всходы дают зерна, вес которых более 0,10 г. Определить: 1) процент семян, которые дадут нормальные всходы; 2) величину, которую не превзойдет вес отдельного зерна с вероятностью 0,99.
- 11.6. Норма высева на 1 га равна 150 кг. Фактический расход семян на 1 га колеблется около этого значения; случайные значения нормы высева распределены нормально и характеризуются средним квадратическим отклонением 10 кг. Определить: 1) вероятность того, что расход семян на 100 га не превысит 15,1 т; 2) вес семян, обеспечивающий посев 100 га с вероятностью 0,95.
- 11.7. Средняя глубина посева семян составляет 4 см; отдельные отклонения от этого значения случайные, распределены нормально со средним квадратическим отклонением 0,6 см. Определить: 1) процент семян, посеянных на глубину более 5 см; 2) процент семян, посеянных на глубину менее 3 см.
- 11.8. Случайные отклонения размера детали от номинала распределены нормально. Математическое ожидание размера детали равно 260 мм, среднее квадратическое отклонение 0,8 мм. Годными считаются детали, размер которых заключен между 259 и 262 мм. Определить: 1) процент изготовления годных деталей; 2) процент бракованных деталей, если точность изготовления ухудшится и будет характеризоваться средним квадратическим отклонением 1 мм.
- 11.9. Путем взятия проб установлено, что потери зерна при уборке в среднем составили 3 г на 1 м², среднее квадратическое отклонение потерь 1 г. Определить: 1) вероятность того, что на 1 га потери составят не менее 29,8 кг; 2) величину, которую не превзойдут потери на 1 га с вероятностью 0,99.
- 11.10. Средний диаметр стволов деревьев на некоторой делянке равен 30 см, среднее квадратическое отклонение 5 см. Считая, что диаметр ствола есть случайная величина, распределенная нормально, определить: 1) процент стволов, имеющих диаметр свыше 25 см; 2) величину, которую не превысит диаметр ствола случайно отобранного дерева с вероятностью 0,95.
- 11.11. Распределение хозяйств некоторого района по проценту выполнения плана продажи продукции государству подчинено нормальному закону распределения с математическим ожиданием 103,3% и средним квадратическим отклонением 1,5%. Определить: 1) процент хозяйств, не выполнивших план; 2) величину, которую не превзойдет процент выполнения плана наудачу взятого хозяйства с вероятностью 0,95.
- 11.12. Высота деревьев в некоторой роще подчиняется нормальному закону с математическим ожиданием 12 м и средним квадратическим отклонением 2 м. Определить: 1) процент деревьев рощи, высота которых превышает 15 м; 2) величину, которую не превысит высота наудачу взятого дерева с вероятностью 0,99.
- 11.13. Длина рыбы является случайной величиной, распределенной нормально с математическим ожиданием 30 см и средним квадратическим отклонением 5 см. Определить: 1) вероятность того, что длина

- наудачу выловленной рыбы заключена между 26 и 30 см; 2) процент рыб, имеющих длину свыше 35 см.
- 11.14. В партии яиц средний вес яйца равен 59 г, среднее квадратическое отклонение 6 г. Вес яиц является случайной величиной, распределенной нормально. В заготовку принимают яйцо весом от 50 до 65 г. Определить: 1) процент яиц, идущих в заготовку; 2) величину, которую не превысит вес наудачу взятого яйца с вероятностью 0,95.
- 11.15. Вес коров является случайной величиной, распределенной нормально с математическим ожиданием 450 кг и средним квадратическим отклонением 20 кг. Определить: 1) вероятность того, что вес наудачу взятой коровы заключен между 400 и 460 кг; 2) процент коров, имеющих вес свыше 480 кг.
- 11.16. Средний вес плодов в одном ящике равен 10 кг, а среднее квадратическое отклонение в весе плодов одного ящика 1,5 кг. Вес плодов является случайной величиной, распределенной нормально. Определить: 1) вероятность того, что в 100 ящиках окажется не менее 970 кг; 2) наибольшее значение, которое не превысит вес плодов в 100 ящиках с вероятностью 0,95.
- 11.17. Диаметр валиков, обработанных на токарном станке, подчинен нормальному закону с математическим ожиданием 23 мм и средним квадратическим отклонением 0,5 мм. Годными считаются те валики, диаметр которых заключен между 22 и 24 мм. Определить: 1) вероятность изготовления годного валика; 2) процент бракованных валиков, если точность изготовления улучшится и будет характеризоваться средним квадратическим отклонением 0,4 мм.
- 11.18. За один рейс автомашина перевозит груз весом в среднем 4 т. Фактический вес в каждом рейсе отклоняется от среднего и характеризуется средним квадратическим отклонением 0,5 т. Определить: 1) вероятность того, что за 100 рейсов будет перевезено не менее 390 т груза; 2) величину, которую не превзойдет вес перевезенного груза за 100 рейсов с вероятностью 0,98.
- 11.19. Рост взрослых мужчин является случайной величиной, распределенной нормально с математическим ожиданием 170 см и средним квадратическим отклонением 5 см. Определить: 1) процент мужчин, имеющих рост не выше 180 см; 2) величину, которую не превзойдет рост одного случайным образом выбранного мужчины с вероятностью 0,95.
- 11.20. Срок службы прибора представляет собой случайную величину, распределенную нормально с математическим ожиданием 15 лет и средним квадратическим отклонением 2 года. Определить: 1) вероятность того, что прибор прослужит от 10 до 20 лет; 2) величину, которую не превзойдет срок службы прибора с вероятностью 0,99.
- 11.21. Диаметр куриных яиц есть случайная величина, распределенная нормально. Для данной партии яиц математическое ожидание равно 50 мм, среднее квадратическое отклонение 2 мм. Определить: 1) вероятность того, что диаметр наудачу взятого яйца не меньше 48 мм; 2) величину которую не превысит диаметр наудачу взятого яйца с вероятностью 0,95.
- 11.22. Распределение пакетов по весу расфасованного товара подчинено нормальному закону с математическим ожиданием 1 кг и средним квадратическим отклонением 0,12 кг. Определить: 1) вероятность

того, что вес наудачу взятого пакета будет не меньше 997 г; 2) наибольшее значение, которое не превзойдет вес наудачу взятого пакета с вероятностью 0,95.

- 11.23. Вес теленка при рождении есть случайная величина, имеющая нормальное распределение. Средний вес теленка при рождении 30 кг, среднее квадратическое отклонение равно 3 кг. Определить: 1) процент телят, имеющих при рождении вес не ниже 25 кг; 2) величину, которую не превысит вес теленка при рождении с вероятностью 0,95.
- 11.24. Средний вес одного яблока равен 130 г; отклонения в весе характеризуются средним квадратическим отклонением 25 г. Отбирается подряд, без выбора, 100 яблок. Определить: 1) вероятность того, что вес 100 яблок окажется не менее 12,5 кг; 2) наибольшее значение, которое не превзойдет вес 100 яблок с вероятностью 0,95.
- 11.25. Распределение коров некоторой фермы по годовому удою молока подчинено нормальному закону с математическим ожиданием 3000 кг и средним квадратическим отклонением 800 кг. В Государственную племенную книгу записывают коров с годовым удоем не менее 4200 кг. Определить: 1) процент коров этой фермы, которые попадут в Государственную племенную книгу; 2) величину, которую не превысит годовой удои наудачу взятой коровы с вероятностью 0,95.
- 11.26. Распределение деталей по затратам времени на одну операцию подчиняется нормальному закону с математическим ожиданием 55с и средним квадратическим отклонением 4с. Определить: 1) вероятность того, что продолжительность обработки взятой наудачу детали не превысит 65с; 2) величину, которую не превзойдет продолжительность обработки детали с вероятностью 0,99.
- 11.27. Норма высева семян на 1 га равна 170 кг. Фактический расход семян на 1 га колеблется около этого значения; случайные значения высева семян распределены нормально и характеризуются средним квадратическим отклонением 12 кг. Определить: 1) вероятность того, что расход семян на 1 га не превысит 171,5 кг; 2) вес семян, обеспечивающий посев 1 га с вероятностью 0,99.
- 11.28. Случайные отклонения размера детали от номинала распределены нормально. Математическое ожидание размера детали равно 250 мм, среднее квадратическое отклонение 0,7 мм. Годными считаются детали, размер которых заключен между 249 и 251 мм. Определить: 1) вероятность изготовления годной детали; 2) процент бракованных деталей, если точность изготовления улучшится и будет характеризоваться средним квадратическим отклонением 0,6 мм.
- 11.29. Случайные значения веса зерна распределены нормально. Математическое ожидание веса зерна равно 0,18 г, среднее квадратическое отклонение 0,05 г. Нормальные всходы дают зерна, вес которых более 0,15 г. Определить: 1) процент семян, которые дадут нормальные всходы; 2) величину, которую не превзойдет вес отдельного зерна с вероятностью 0,95.
- 11.30. Масса вагона есть случайная величина, распределенная нормально с математическим ожиданием 65 т и средним квадратическим отклонением 0,9 т. Определить: 1) вероятность того, что

- очередной вагон имеет массу от 60 до 70 т; 2) величину, которую не превышает масса наудачу взятого вагона с вероятностью 0,99.
- 11.31. Диаметр детали, изготавливаемой на станке, есть случайная величина, распределенная нормально с математическим ожиданием 25 см и средним квадратическим отклонением 0,4 см. Определить: 1) процент деталей, имеющих диаметр от 24,8 до 25,6 см; 2) величину, которую не превзойдет диаметр наудачу взятой детали с вероятностью 0,99.
- 11.32. Диаметр подшипников, изготовленных на заводе, представляет собой случайную величину, распределенную нормально, с математическим ожиданием 1,5 см. и средним квадратическим отклонением 0,04 см. Определить: 1) вероятность того, что размер наугад взятого подшипника колеблется от 1,4 до 2 см; 2) величину, которую не превысит диаметр наудачу взятого подшипника с вероятностью 0,99.

Дополнительные задачи

- 11.33. Поезд состоит из 100 вагонов. Масса каждого вагона есть случайная величина, распределенная нормально с математическим ожиданием 65 т и средним квадратическим отклонением 0,9 т. Локомотив может везти состав массой не более 6600 т, в противном случае необходимо прицеплять второй локомотив. Найти вероятность того, что второй локомотив не потребуется.
- 11.34. Рост взрослого мужчины является случайной величиной, распределенной по нормальному закону, с математическим ожиданием 170 см и дисперсией 36 см². Вычислить вероятность того, что хотя бы один из наудачу выбранных четырех мужчин имеет рост от 168 до 172 см.
- 11.35. Плотность вероятности случайной величины X задана выражением $f(x) = a \cdot e^{-\frac{(x-5)^2}{8}}$. Найти коэффициент a и определить вероятность того, что в результате опыта случайная величина X отклонится от своего математического ожидания не более чем на 1,5.
- 11.36. Размер диаметра втулок, изготовленных заводом, есть нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием 2,5 см и средним квадратическим отклонением 0,01 см. В каких границах с вероятностью 0,9973 можно практически гарантировать размер диаметра втулки?
- 11.37. Бомбардировщик, пролетевший вдоль моста длиной 30 м и шириной 8 м, сбросил бомбы. Случайные величины X и Y (расстояния от вертикальной и горизонтальной осей симметрии моста до места падения бомбы) независимы и распределены нормально со средними квадратическими отклонениями, соответственно равными 6 м и 4 м, и математическими ожиданиями, равными нулю. Найти: 1) вероятность попадания в мост одной сброшенной бомбы; 2) вероятность разрушения моста, если сброшены две бомбы, причем для разрушения моста достаточно одного попадания.

12. Системы двух случайных величин.

Л и т е р а т у р а : [1, гл. 2, §2.4, 2.5, 2.10], [3, гл. 14], [4, гл.2, §2.8].

Задачи

Система двух случайных величин X и Y задана таблицей.

В задачах 12.1 – 12.32 требуется определить:

а) законы распределения каждой из составляющих случайных величин X и Y , их математические ожидания, средние квадратические отклонения, коэффициент корреляции;

б) условный закон распределения случайной величины X при условии, что составляющая Y приняла значение y_1 ; условный закон распределения случайной величины Y при условии, что составляющая X приняла значение x_1 и их условные математические ожидания.

в) являются ли случайные величины X и Y независимыми?

12.1 .

$y \backslash X$	1	2	3	5	8
0	0,15	0,15	0,01	0,02	0,01
1	0,002	0,008	0,07	0,06	0,00
3	0,03	0,08	0,12	0,13	0,16

$y_1=1, x_1=3.$

12.2.

$X \backslash Y$	6	8	9	10	11
1	0,03	0,07	0,01	0,01	0,09
3	0,01	0,00	0,10	0,04	0,05
7	0,08	0,02	0,03	0,01	0,04
8	0,07	0,08	0,18	0,02	0,06

$y_1=9, x_1=7$

12.3.

$X \backslash Y$	-1	0	2	8
5	0,04	0,05	0,04	0,01
10	0,02	0,08	0,01	0,03
12	0,02	0,07	0,06	0,02
13	0,14	0,30	0,07	0,04

$y_1=2, x_1=12$

12.4.

$y \backslash X$	4	7	12	14
1	0,08	0,07	0,09	0,01
4	0,12	0,05	0,04	0,07
7	0,13	0,15	0,09	0,10

$y_1=4, x_1=7$

12.5.

$\begin{matrix} y \\ X \end{matrix}$	-2	-1	2	5
4	0,07	0,06	0,10	0,02
5	0,11	0,04	0,05	0,08
9	0,11	0,14	0,10	0,12

$y_1=-1, x_1=5$

12.6.

$\begin{matrix} y \\ X \end{matrix}$	-11	-8	0	4	7	9
4	0,15	0,15	0,01	0,05	0,01	0,15
9	0,15	0,01	0,15	0,01	0,01	0,15

$y_1=0, x_1=4$

12.7.

$\begin{matrix} y \\ X \end{matrix}$	5	10	11	15	25	28
4	0,44	0,06	0,05	0,05	0,04	0,05
9	0,05	0,05	0,03	0,02	0,05	0,01

$y_1=9, x_1=10$

12.8.

$\begin{matrix} y \\ X \end{matrix}$	-2	0	7	10
1	0,01	0,10	0,09	0,05
3	0,15	0,04	0,16	0,02
15	0,08	0,10	0,13	0,7

$y_1=3, x_1=0$

12.9.

$\begin{matrix} y \\ X \end{matrix}$	1	4	5	9	19
16	0,10	0,08	0,17	0,06	0,14
25	0,12	0,24	0,04	0,02	0,03

$y_1=16, x_1=5$

12.10.

$\begin{matrix} y \\ X \end{matrix}$	2	4	15	20
7	0,02	0,08	0,09	0,01
10	0,05	0,05	0,07	0,03
12	0,04	0,06	0,25	0,25

$y_1=7, x_1=4$

12.11.

$y \backslash X$	3	5	11	14
7	0,16	0,14	0,12	0,18
10	0,17	0,13	0,01	0,01
12	0,01	0,04	0,02	0,01

$y_1=7, x_1=14$

12.12.

$y \backslash X$	1	3	5	7
9	0,07	0,03	0,20	0,05
13	0,05	0,10	0,04	0,06
15	0,10	0,20	0,01	0,09

$y_1=15, x_1=7$

12.13.

$X \backslash y$	3	4	6	10
-1	0,10	0,10	0,09	0,01
2	0,20	0,10	0,04	0,06
5	0,16	0,04	0,05	0,05

$y_1=3, x_1=-1$

12.14.

$X \backslash y$	16	17	19	35
6	0,05	0,07	0,06	0,05
8	0,04	0,03	0,02	0,01
12	0,01	0,21	0,23	0,22

$y_1=17, x_1=6$

12.15.

$X \backslash y$	12	23	25	30
8	0,03	0,05	0,04	0,03
10	0,02	0,01	0,10	0,12
12	0,13	0,18	0,01	0,28

$y_1=25, x_1=12$

12.16.

$y \backslash X$	11	21	25	33
2	0,08	0,09	0,05	0,11
3	0,10	0,01	0,01	0,10
12	0,18	0,19	0,02	0,06

$y_1=2, x_1=25$

12.17.

$y \backslash X$	24	48	50	51
6	0,13	0,03	0,09	0,05
7	0,18	0,04	0,04	0,02
16	0,19	0,08	0,11	0,04

$y_1=6, x_1=48$

12.18.

$y \backslash X$	14	18	21	34	40
2	0,05	0,04	0,03	0,11	0,08
9	0,02	0,01	0,18	0,19	0,29

$y_1=9, x_1=18$

12.19.

$y \backslash X$	5	6	12	24
-6	0,51	0,02	0,12	0,03
-5	0,03	0,05	0,02	0,01
-2	0,09	0,08	0,01	0,03

$y_1=-2, x_1=12$

12.20.

$X \backslash y$	7	13	18	24	30
2	0,10	0,12	0,08	0,11	0,09
8	0,13	0,07	0,14	0,03	0,13

$y_1=24, x_1=2$

12.21.

$X \backslash y$	6	15	22	40
1	0,05	0,08	0,07	0,06
15	0,04	0,03	0,02	0,01
18	0,09	0,10	0,12	0,33

$y_1=6, x_1=1$

12.22.

$y \backslash X$	6	14	19	28
5	0,07	0,11	0,15	0,06
8	0,18	0,20	0,02	0,01
10	0,03	0,04	0,05	0,08

$y_1=8, x_1=14$

12.23.

$y \backslash X$	6	25	30	38
2	0,08	0,11	0,12	0,03
5	0,01	0,02	0,30	0,01
12	0,02	0,03	0,04	0,23

$y_1=5, x_1=6$

12.24.

$y \backslash X$	10	12	18	32
3	0,06	0,05	0,11	0,04
12	0,22	0,03	0,15	0,02
15	0,01	0,07	0,13	0,11

$y_1=10, x_1=15$

12.25.

$y \backslash X$	13	16	24	40
6	0,15	0,11	0,25	0,02
17	0,03	0,04	0,10	0,01
20	0,02	0,01	0,03	0,23

$y_1=40, x_1=20$

12.26.

$y \backslash X$	2	7	18	33
2	0,07	0,11	0,48	0,10
7	0,02	0,03	0,04	0,05
9	0,02	0,01	0,03	0,04

$y_1=2, x_1=7$

12.27.

$y \backslash X$	2	15	28	30
6	0,03	0,03	0,02	0,01
7	0,15	0,18	0,23	0,31
15	0,01	0,01	0,01	0,01

$y_1=7, x_1=30$

12.28.

$y \backslash X$	3	12	15	20	25
7	0,10	0,08	0,07	0,06	0,11
15	0,05	0,04	0,12	0,03	0,34

$y_1=15, x_1=7$

12.29.

$\begin{matrix} y \\ \backslash X \end{matrix}$	5	6	18	21
8	0,05	0,08	0,07	0,11
10	0,12	0,18	0,20	0,03
14	0,07	0,10	0,04	0,04

$y_1=18, x_1=8$

12.30.

$\begin{matrix} y \\ \backslash X \end{matrix}$	6	24	48	50	55
13	0,08	0,07	0,06	0,12	0,13
28	0,14	0,02	0,18	0,10	0,10

$y_1=13, x_1=50$

12.31.

$\begin{matrix} y \\ \backslash X \end{matrix}$	3	7	11	20	25
3	0,08	0,02	0,07	0,03	0,06
15	0,04	0,50	0,01	0,09	0,10

$y_1=15, x_1=20$

12.32.

$\begin{matrix} y \\ \backslash X \end{matrix}$	-4	-2	0	15	33
7	0,49	0,11	0,08	0,02	0,03
12	0,09	0,01	0,04	0,07	0,06

$y_1=0, x_1=7$

Дополнительные задачи

12.33. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x, y) = \begin{cases} c \sin(x + y) & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

при любых других значениях x и y .

Требуется: а) найти коэффициент c ; б) определить функцию распределения системы; в) определить математическое ожидание и дисперсию случайных величин X и Y ; г) определить корреляционный момент величин X и Y .

12.34. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x, y) = \begin{cases} \cos x \cos y & \text{при } 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при любых других значениях } x \text{ и } y. \end{cases}$$

при любых других значениях x и y .

Требуется: а) определить функцию распределения системы (X, Y) ;

б) найти коэффициент корреляции γ_{xy} .

12.35. Двумерная случайная величина (X, Y) подчинена закону распределения с плотностью

$f(x, y) = Axy$ в области D и $f(x, y) = 0$ вне этой области. Область D – треугольник, ограниченный прямыми $x+y=1$, $x=0$, $y=0$. Найти : а) величину A ; б) $M(X)$, $M(Y)$; в) $D(X)$, $D(Y)$; г) коэффициент корреляции γ_{xy} .

12.36. Двумерная случайная величина (X, Y) имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x, y) = \frac{A}{\pi^2 (16 + x^2)(25 + y^2)}.$$

Требуется; 1) определить величину A ; 2) найти функцию распределения $F(x, y)$; 3) вычислить вероятность того, что X и Y примут соответственно значения: $X < 4$, $Y < 5$.

12.37. Система случайных величин (X, Y) подчинена закону распределения с плотностью $f(x, y) = a(x+y)$ в области D и $f(x, y) = 0$ вне этой области.

Область D – квадрат, ограниченный линиями $x=0$, $x=3$, $y=0$, $y=3$.

а) Определить коэффициент a .

б) Вычислить вероятность попадания случайной точки (X, Y) на квадрат Q , ограниченной линиями $x=1$, $x=2$, $y=1$, $y=2$.

в) Найти математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$.

г) Найти средние квадратические отклонения $\sigma(X)$ и $\sigma(Y)$.