

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ЛЕКЦИИ

- [6.1. Неопределённый интеграл и его свойства](#)
- [6.2. Основные методы интегрирования](#)
- [6.3. Определённый интеграл и его основные свойства](#)
- [6.4. Методы вычисления определённых интегралов](#)
- [6.5. Вычисление площадей плоских фигур](#)

ГЛОСАРИЙ ЛЕКЦИИ

- 6.1. [Первообразная функция, неопределённый интеграл, интегрирование, свойства неопределённого интеграла, основная таблица интегралов;](#)
- 6.2. [Непосредственное интегрирование, формула интегрирования по частям;](#)
- 6.3. [Определённый интеграл, геометрический смысл определённого интеграла, свойства определённого интеграла.](#)
- 6.4. [Метод непосредственного интегрирования в определённом интеграле, замена переменной в определённом интеграле, интегрирование по частям в определённом интеграле;](#)
- 6.5. [Методика вычисления площадей фигур.](#)

ЛЕКЦИЯ 6. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

6.1. Неопределённый интеграл и его свойства

Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$. Если $F(x)$ есть первообразная функция для функции $f(x)$, то каждая из функций $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, будет также первообразной для функции $f(x)$. Это означает, что если функция $f(x)$ имеет хотя бы одну первообразную функцию, то она может иметь бесчисленное множество первообразных функций и все они отличаются друг от друга на постоянную величину.

Совокупность всех первообразных функций $F(x)+C$ для функции $f(x)$ называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx = F(x) + C$. Процесс нахождения первообразной функции называется *интегрированием*. Переменная x называется *переменной интегрирования*, функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*.

Неопределённый интеграл обладает свойствами, использование которых в значительной степени может упростить интегрирование функций:

- Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции, т.е. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
- Дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению, т.е. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.
- Неопределённый интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная, т.е. $\int dF(x) = F(x) + C$.
- Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла: $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.
- Неопределённый интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т.е. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.
- Результат интегрирования не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е. если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то при замене пе-

ременной интегрирования x на t $\int f(t)dt = F(t) + C$. Такое свойство называется *инвариантностью формулы интегрирования*.

При интегрировании удобно пользоваться формулами, которые составляют таблицу основных интегралов:

1	$\int dx = x + C$	7	$\int \cos x dx = \sin x + C$
2	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	8	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$
3	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	9	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$
4	$\int e^x dx = e^x + C$	10	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
5	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$
6	$\int \sin x dx = -\cos x + C$		

Интегралы данной таблицы называются ***табличными***. Каждая из формул таблицы справедлива в области определения подынтегральной функции.

[К перечню вопросов](#)

6.2. Основные методы интегрирования

При интегрировании функций не всегда можно сразу использовать таблицу интегралов. Как правило, вначале нужно данный интеграл преобразовать таким образом, чтобы свести его к одной или нескольким формулам таблицы. Для этого используются специальные методы интегрирования, основными из которых являются *непосредственное интегрирование, замена переменной (или метод подстановки), метод интегрирования по частям*.

Суть метода непосредственного интегрирования состоит в том, что данный интеграл с помощью алгебраических преобразований и свойств неопределённого интеграла сводится к табличным интегралам. При этом часто удобно пользоваться некоторыми преобразованиями дифференциала, которые называются «подведением под знак дифференциала»:

- $du = d(u + a)$, где a – число;
- $du = \frac{1}{a} d(au)$, где a – некоторое не равное нулю число;
- $udu = \frac{1}{2} d(u^2)$;
- $\cos u \cdot du = d(\sin u)$;
- $\sin u \cdot du = -d(\cos u)$;
- $\frac{1}{u} du = d(\ln u)$;
- $\frac{1}{\cos^2 u} du = d(\operatorname{tg} u)$.

Пример 1. Найти неопределённые интегралы:

а) $\int x^6 dx$; б) $\int (2x^3 - 4x^2 + 5) dx$; в) $\int \left(x^2 - \frac{1}{x} + e^x - 4 \sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$;

г) $\int \left(\sqrt[4]{x^3} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx$.

Решение. а) $\int x^6 dx = \frac{x^{6+1}}{6+1} + C = \frac{x^7}{7} + C$;

$$\begin{aligned} \text{б) } \int (2x^3 - 4x^2 + 5) dx &= 2 \int x^3 dx - 4 \int x^2 dx + 5 \int dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4} - 4 \cdot \frac{x^3}{3} + \\ &+ 5 \cdot x + C = \frac{1}{2} x^4 - \frac{4}{3} x^3 + 5x + C ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \int \left(x^2 - \frac{1}{x} + e^x - 4 \sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx &= \int x^2 dx - \int \frac{1}{x} dx + \int e^x dx - \\ &- 4 \int \sin x dx + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{x^3}{3} - \ln|x| + e^x - 4 \cdot (-\cos x) + \operatorname{tg} x + C = \\ &= \frac{x^3}{3} - \ln|x| + e^x + 4 \cos x + \operatorname{tg} x + C ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \int \left(3\sqrt[4]{x^3} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx &= 3 \int x^{\frac{3}{4}} - 2 \int \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= 3 \int x^{\frac{3}{4}} dx - 2 \int x^{-\frac{1}{3}} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx = 3 \cdot \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} - 2 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + \operatorname{arctg} x + C = \\ &= 3 \cdot \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} - 2 \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + \operatorname{arctg} x + C = \frac{12}{7} \sqrt[4]{x^7} - 3 \sqrt[3]{x^2} + \operatorname{arctg} x + C . \end{aligned}$$

Если интеграл непосредственно не находится, то во многих случаях результат может быть достигнут с помощью *метода замены переменной (подстановки)*. Данный метод помогает значительно упростить подынтегральное выражение и свести интеграл к одной из формул таблицы.

Если подынтегральная функция представляет собой дробь, у которой числитель есть производная знаменателя, то такой интеграл равен логарифму натуральному от абсолютной величины знаменателя,

$$\text{т.е. } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C .$$

Пример 2. Найти интегралы: а) $\int \sin 3x dx$;

$$\text{б)} \int (3-x)^5 dx; \quad \text{в)} \int \sqrt[5]{3x-4} dx; \quad \text{г)} \int x e^{x^2} dx; \quad \text{д)} \int \frac{x^2-1}{x^3-3x+5} dx.$$

Решение. а) $\int \sin 3x dx = \{ \text{заменяем } t=3x, \text{ тогда } dt=3dx, dx = \frac{dt}{3} \} =$
 $= \int \sin t \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int \sin t dt = \frac{1}{3} (-\cos t) + C = -\frac{1}{3} \cos 3x + C;$

б) $\int (3-x)^5 dx = \{ \text{заменяем } t=3-x, dt=-dx, dx=-dt \} = \int t^5 (-dt) =$
 $= -\int t^5 dt = -\frac{t^6}{6} + C = -\frac{(3-x)^6}{6} + C;$

в) $\int \sqrt[5]{3x-4} dx = \{ t=3x-4, dt=3dx, dx = \frac{dt}{3} \} = \int \sqrt[5]{t} \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int t^{\frac{1}{5}} dt =$
 $= \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + C = \frac{5}{18} \sqrt[5]{t^6} + C = \frac{5}{18} \sqrt[5]{(3x-4)^6} + C;$

г) $\int x e^{x^2} dx = \{ t = x^2, dt=2x dx, x dx = \frac{dt}{2} \} = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int e^t dt =$
 $= \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C;$

д) $\int \frac{x^2-1}{x^3-3x+5} dx = \{ t = x^3-3x+5, dt = (3x^2-3) dx = 3(x^2-1) dx, \}$
 $(x^2-1) dx = \frac{dt}{3} \} = \int \frac{\frac{dt}{3}}{t} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \ln|t| + C = \frac{1}{3} \ln|x^3-3x+5| + C.$

Если интеграл имеет вид $\int u dv$, то для его нахождения используется формула интегрирования по частям $\int u dv = uv - \int v du$. Если в результате получилось, что интеграл в правой части формулы проще, чем в левой, то применение этой формулы оправдано. Обычно в подынтегральном выражении за функцию u принимают тот множитель, который после его дифференцирования становится более про-

стым. Оставшуюся часть подынтегрального выражения принимают за дифференциал dv некоторой функции v .

При использовании данного метода интегрирования удобно пользоваться следующими рекомендациями:

- в интегралах вида $\int P(x)e^{kx} dx$, $\int P(x)\sin x dx$, $\int P(x)\cos x dx$ имеет смысл положить $u=P(x)$, а в качестве dv взять оставшуюся часть подынтегрального выражения;

- в интегралах вида $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\arccos x dx$, $\int P(x)\arctg x dx$, $\int P(x)\operatorname{arcctg} x dx$, $\int P(x)\ln x dx$ следует положить $dv=P(x)dx$, а оставшуюся часть подынтегрального выражения обозначить через u ;

- в интегралах вида $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int e^{ax}\cos bxdx$ можно положить $u=e^{ax}$, а оставшуюся часть подынтегрального выражения принять за dv .

Пример 3. Найти интегралы: а) $\int x \cos x dx$;

б) $\int (2x+1)e^{3x} dx$; в) $\int \ln x dx$; г) $\int x^2 e^{5x} dx$.

Решение. а) $\int x \cos x dx = \{u = x, du = dx, dv = \cos x dx,$

$$\int dv = \int \cos x dx, v = \sin x\} = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C;$$

б) $\int (2x+1)e^{3x} dx = \{u = 2x+1, du = 2dx, dv = e^{3x} dx, \int dv = \int e^{3x} dx,$

$$v = \frac{1}{3}e^{3x}\} = (2x+1) \cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e \cdot 2dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{3} \int e^{3x} dx =$$

$$= \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}e^{3x} + C = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C =$$

$$= \frac{1}{3}e^{3x} \left(2x + \frac{1}{3} \right) + C;$$

в) $\int \ln x dx = \{u = \ln x, du = \frac{1}{x} dx, dv = dx, \int dv = \int dx, v = x\} =$

$$= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C;$$

г) $\int x^2 e^{5x} dx = \{u = x^2, du = 2x dx, dv = e^{5x} dx, \int dv = \int e^{5x} dx,$

$$v = \frac{1}{5} e^{5x} \} = x^2 \cdot \frac{1}{5} e^{5x} - \int \frac{1}{5} e^{5x} \cdot 2x dx = \frac{1}{5} x^2 e^{5x} - \frac{2}{5} \int x e^{5x} dx = \{ \text{к инте-}$$

гралу ещё раз применим интегрирование по частям: $u = x$, $du = dx$,

$$dv = e^{5x} dx, \int dv = \int e^{5x} dx, v = \frac{1}{5} e^{5x} \} = \frac{1}{5} x^2 e^{5x} -$$

$$- \frac{2}{5} \left(x \cdot \frac{1}{5} e^{5x} - \int \frac{1}{5} e^{5x} dx \right) = \frac{1}{5} x^2 e^{5x} - \frac{2}{5} \left(\frac{1}{5} x e^{5x} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} e^{5x} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{5} x^2 e^{5x} - \frac{2}{25} x e^{5x} + \frac{2}{125} e^{5x} + C = \frac{1}{5} e^{5x} \left(x^2 - \frac{2}{5} x + \frac{2}{25} \right) + C.$$

[К перечню вопросов](#)

6.3. Определённый интеграл и его основные свойства

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Выполним следующие действия.

- Разобьём отрезок $[a, b]$ точками $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ на n отрезков $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, которые называются частичными.

- В каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ произвольно выберем точку $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, вычислим значение функции в этой точке $f(c_i)$ и произведение $f(c_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

- Если существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$, ни от выбора точек $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, то он называется **определённым интегралом** от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i.$$

Числа a и b называются *нижним и верхним пределами интегрирования*. Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)dx$ - *подынтегральным выражением*, x - *переменной интегрирования*, $[a, b]$ - *отрезком интегрирования*.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $y = f(x) \geq 0$. Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу осью Ox , сбоку – прямыми $x=a$ и $x=b$, называется *криволинейной трапецией*.

Определённый интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции. В этом состоит *геометрический смысл определённого интеграла*.

Основными свойствами определённого интеграла являются:

- Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла, т.е. $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$;

- Определённый интеграл от алгебраической суммы непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $f(x)$ и $g(x)$ равен алгебраической сумме определённых интегралов от этих функций, т.е.

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx ;$$

• Если верхний и нижний пределы интегрирования поменять местами, то определённый интеграл изменит знак на противоположный,

$$\text{т.е. } \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx ;$$

• Если пределы интегрирования равны между собой, то определённый интеграл равен нулю, т.е. $\int_a^a f(x) dx = 0 ;$

• Определённый интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots ;$

• Если отрезок интегрирования $[a, b]$ разбит на две части $[a, c]$ и $[c, b]$ и если существуют интегралы $\int_a^c f(x) dx$ и $\int_c^b f(x) dx$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx .$$

Для вычисления определённых интегралов используется *формула Ньютона-Лейбница*

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) ,$$

где $F'(x) = f(x)$, т.е. $F(x)$ - любая первообразная функция для $f(x)$.

[К перечню вопросов](#)

6.4. Методы вычисления определённых интегралов

При вычислении определённых интегралов используются методы *непосредственного интегрирования*, *замены переменной (подстановки)* и *интегрирования по частям*.

Непосредственное интегрирование предполагает сведение данного интеграла с помощью алгебраических и арифметических преобразований к формулам таблицы основных интегралов и использование формулы Ньютона-Лейбница.

Пример 1. Вычислить интегралы: а) $\int_1^2 x dx$; б) $\int_0^{\pi} \sin x dx$;

в) $\int_0^1 e^x dx$; г) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx$; д) $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x^4} dx$.

Решение. а) $\int_1^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$;

б) $\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$;

в) $\int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$;

г) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x \Big|_0^{\sqrt{3}} = \arctg \sqrt{3} - \arctg 0 = \frac{\pi}{3}$;

д) $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x^4} dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 x^{-4} dx = \frac{x^{-3}}{-3} \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = -\frac{1}{3x^3} \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = -\frac{1}{3 \cdot 2^3} - \left(-\frac{1}{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3} \right) = 2 \frac{5}{8}$.

Метод замены переменной в определённом интеграле предполагает следующее. Пусть выполнены условия:

- функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$;
- функция $x = \varphi(t)$ определена на отрезке $[\alpha, \beta]$ и имеет на нём непрерывную производную;
- $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Тогда определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$ может быть вычислен с помощью введения новой переменной и при этом справедлива формула $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. Часто вместо замены $x = \varphi(t)$ применяют обратную замену $t = \psi(x)$.

Пример 2. Вычислить интегралы: а) $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$;

б) $\int_{-2}^0 \sqrt{1-4x} dx$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$.

Решение. а) Выполним замену $t = x+1$, $dt = dx$. Вычислим пределы интегрирования для переменной t :

x	0	1
t	1	2

Тогда $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

б) Выполним замену $t = 1-4x$ и продифференцируем обе части равенства: $dt = -4dx$, $dx = -\frac{dt}{4}$. Изменим пределы интегрирования:

x	-2	0
t	9	1

В результате $\int_{-2}^0 \sqrt{1-4x} dx = \int_9^1 \sqrt{t} \left(-\frac{dt}{4}\right) = -\frac{1}{4} \int_9^1 t^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{4} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_9^1 =$
 $= -\frac{1}{6} \sqrt{t^3} \Big|_9^1 = -\frac{1}{6} \sqrt{1^3} - \left(-\frac{1}{6} \sqrt{9^3}\right) = -\frac{1}{6} (1-27) = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$.

в) В данном случае выполним замену $t = \sin x$, тогда $dt = \cos x dx$. Для переменной t вычислим пределы интегрирования:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

Получим $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.

Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$. Тогда для определённого интеграла справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Примеры 3. Вычислить интегралы: а) $\int_{\pi}^{2\pi} x \cos x dx$;

б) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx$.

Решение. а) Положим $u=x$, тогда $du=dx$. Оставшуюся часть подынтегрального выражения примем за dv : $dv = \cos x dx$. Проинтегрируем это выражение: $\int dv = \int \cos x dx$, $v = \sin x$. Тогда по формуле

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{2\pi} x \cos x dx &= x \sin x \Big|_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = \\ &= 2\pi \sin 2\pi - \pi \sin \pi - (-\cos x) \Big|_{\pi}^{2\pi} = \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = \cos 2\pi - \cos \pi = 1 - (-1) = 2. \end{aligned}$$

б) Положим $u=\ln x$, $dv = \frac{1}{x^5} dx$. Тогда $du = \frac{1}{x} dx$, $\int dv = \int \frac{1}{x^5} dx$,

$$v = \int x^{-5} dx, \quad v = \frac{x^{-4}}{-4} = -\frac{1}{4x^4}.$$

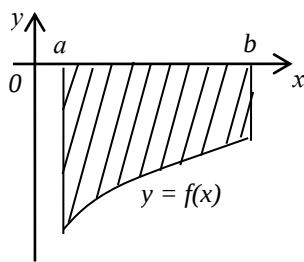
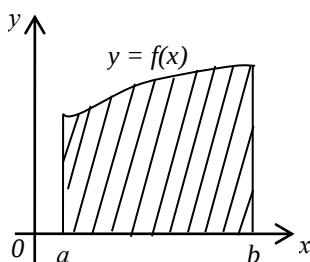
По формуле интегрирования по частям запишем $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx = -\frac{1}{4x^4} \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \left(-\frac{1}{4x^4}\right) \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{4 \cdot 2^4} \ln 2 +$

$$+ \frac{1}{4 \cdot 1^4} \ln 1 + \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{1}{x^5} dx = \frac{\ln 2}{64} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^{-4}}{-4} \Big|_1^2 = \frac{\ln 2}{64} - \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x^4} \right) \Big|_1^2 =$$

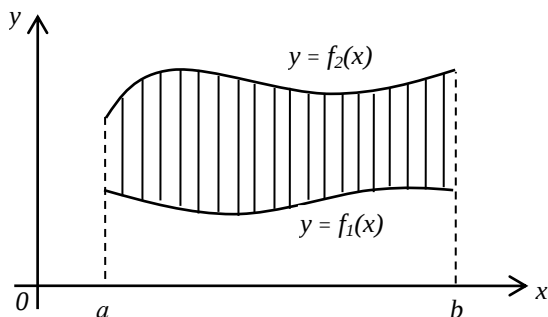
$$= \frac{\ln 2}{64} - \frac{1}{16} \left(\frac{1}{2^4} - \frac{1}{1^4} \right) = \frac{\ln 2}{64} + \frac{15}{256}.$$

6.5. Вычисление площадей плоских фигур

Согласно геометрическому смыслу определённого интеграла площадь криволинейной трапеции, расположенной выше оси абсцисс, равна определённому интегралу от функции $f(x)$: $S = \int_a^b f(x)dx$. Если криволинейная трапеция расположена ниже оси абсцисс, то площадь такой трапеции вычисляется по формуле: $S = -\int_a^b f(x)dx$.



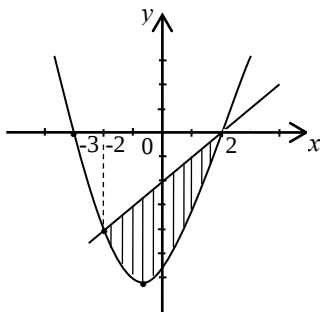
Пусть фигура ограничена графиками функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и прямыми $x=a$, $x=b$.



Тогда площадь фигуры, ограниченной этими линиями, вычисляется по формуле: $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$.

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + x - 6$, $y - x + 2 = 0$.

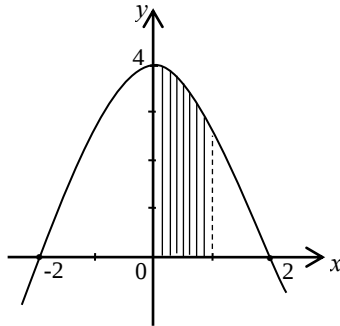
Решение. Графиком функции $y = x^2 + x - 6$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдём точки пересечения параболы с осью Ox : $x^2 + x - 6 = 0$, $D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$, $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. Уравнение прямой $y - x + 2 = 0$ запишем в виде $y = x - 2$. Изобразим эти линии в системе координат и вычислим площадь заштрихованной фигуры.



Найдём абсциссы точек пересечения линий: $x^2 + x - 6 = x - 2$, $x^2 - 4 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Тогда площадь заштрихованной фигуры равна $\int_{-2}^2 (x - 2 - (x^2 + x - 6)) dx = \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 4x \right)_{-2}^2 = -\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2 - \left(-\frac{(-2)^3}{3} + 4 \cdot (-2) \right) = -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 = 10\frac{2}{3}$ (кв. ед.).

Пример 2. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 4$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

Решение. Изобразим в системе координат плоскую фигуру, ограниченную заданными линиями.



Полученная плоская фигура является криволинейной трапецией, ограниченной сверху графиком функции $y = -x^2 + 4$, а сбоку прямыми $x=0$ и $x=1$. Объём тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Ox , вычисляется по формуле $V_x = \pi \int_a^b y^2 dx$. В нашем случае

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^1 (-x^2 + 4) dx = \pi \int_0^1 (x^4 - 8x^2 + 16) dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} - 8 \cdot \frac{x^3}{3} + 16x \right) \Bigg|_0^1 = \\ &= \pi \left(\frac{1^5}{5} - 8 \cdot \frac{1^3}{3} + 16 \cdot 1 \right) - \pi \left(\frac{0^5}{5} - 8 \cdot \frac{0^3}{3} + 16 \cdot 0 \right) = 13 \frac{8}{15} \pi \text{ (куб. ед)}. \end{aligned}$$

[К перечню вопросов](#)