ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ЛЕКЦИИ

ГЛОСАРИЙ ЛЕКЦИИ

7.1. Дифференциальное уравнение (ДУ), порядок ДУ, решение ДУ, общее решение ДУ, частное решение ДУ;
7.2. Задача Коши, её геометрическая интерпретация;
7.3ДУ с разделяющимися переменными;
7.4. Линейное ДУ I –го порядка;

ЛЕКЦИЯ 7. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

7.1. Понятие дифференциального уравнения. Общее и частное решение.

При изучении различных явлений часто не удаётся найти закон, который непосредственно связывает независимую переменную и искомую функцию, но можно установить связь между искомой функцией и её производными.

Соотношение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и её производные, называется *дифференциальным уравнением*:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \ ,$$

где x – независимая переменная, y – искомая функция,

$y', y'', \ldots, y^{(n)}$ – производные искомой функции.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в уравнение.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y') = 0.$$

В это уравнение входит производная только первого порядка, то оно называется *дифференциальным уравнением первого порядка*.

Если уравнение можно разрешить относительно производной и записать в виде

$$y' = f(x, y) \ ,$$

то такое уравнение называется дифференциальным уравнением первого порядка в нормальной форме.

Во многих случаях целесообразно рассматривать уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

которое называется *дифференциальным уравнением первого порядка, записанным в дифференциальной форме*.

Так как $y'=\frac{dy}{dx}$, то уравнение $y'=f(x,y)$ можно записать в виде $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ или $f(x,y)dx-dy=0$, где можно считать $P(x,y)=f(x,y)$ и $Q(x,y)=-1$.

Решением дифференциального **уравнения** называется любая функция $y=\varphi(x)$, которая при подстановке её в уравнение или обращает его в тождество:

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x))\equiv 0 \text{ или } \varphi'(x)\equiv f(x,\varphi(x)).$$

Процесс нахождения всех решений дифференциального уравнения называется его *интегрированием*, а график решения $y=\varphi(x)$ дифференциального уравнения называется *интегральной кривой* этого уравнения.

Если решение дифференциального уравнения получено в неявном виде $\Phi(x,y)=0$, то оно называется *интегралом* данного дифференциального уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется семейство функций вида $y=\varphi(x,C)$, зависящее от произвольной постоянной *C*, каждая из которых является решением данного дифференциального уравнения при любом допустимом значении произвольной постоянной *C*. Таким образом, дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, получаемое из формулы общего решения при конкретном значении произвольной постоянной *C*.

К перечню вопросов

7.2. Задача Коши и её геометрическая интерпретация.

Дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений. Чтобы из этого множества выделить одно решение, которое называется частным, нужно задать некоторые дополнительные условия.

Задача отыскания частного решения уравнения при заданных условиях называется *задачей Коши*. Эта задача является одной из важнейших в теории дифференциальных уравнений.

Формулируется задача Коши следующим образом: *среди всех решений дифференциального уравнения найти такое решение* $y = y(x)$**,** *в котором функция* $y(x)$ *принимает заданное числовое значение* y_0 *, если независимая переменная x принимает заданное числовое значение* x_0 , т.е.

$$y(x_0) = y_0 \ , \quad (x_0, y_0) \in D \ ,$$

где D – область определения функции $f(x, y)$.

Значение y_0 называется *начальным значением функции*, а x_0 – *начальным значением независимой переменной*. Само условие называется *начальным условием* или *условием Коши*.

С геометрической точки зрения задачу Коши для дифференциального уравнения можно сформулировать следующим образом: *из множества интегральных кривых уравнения выделить ту, которая проходит через заданную точку* $M_0(x_0, y_0)$.

К перечню вопросов

7.3. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Одним из простейших дифференциальных уравнений является дифференциальное *уравнение первого порядка, не содержащее искомой функции*:

$$y' = f(x) \ .$$

Учитывая, что $y' = \frac{dy}{dx}$, запишем уравнение в виде $\frac{dy}{dx} = f(x)$ или $dy = f(x)dx$. Интегрируя обе части последнего уравнения, получим: $\int dy = \int f(x)dx + C$ или $y = \int f(x) + C$ – общее решение приведенного уравнения.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = 3x^2 - \sqrt[4]{x}$.

Пример 2. Найти решение уравнения $y' = \frac{1}{x}$ при условии $y(1) = 2$.

Уравнение

$$y' = f(y)$$

Называется *дифференциальным уравнением первого порядка, не содержащим независимой переменной*. Запишем его в виде $\frac{dy}{dx} = f(y)$ или $dx = \frac{dy}{f(y)}$. Проинтегрируем обе части последнего уравнения: $\int dx = \int \frac{dy}{f(y)} + C$ или $x = \int \frac{dy}{f(y)} + C$ – общее решение уравнения.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y' = y^2$.

Уравнение вида

$$y' = f(x)\varphi(y)$$

интегрируется с помощью разделения переменных. Для этого уравнение запишем в виде $\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)$, а затем с помощью операций умножения и деления приводим его к такой форме, чтобы в одну часть входила только функция от x и дифференциал dx, а во вторую часть – функция от y и дифференциал dy. Для этого обе части уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)$ умножим на dx и разделим на $\varphi(y)$. В результате получим уравнение

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx\,,$$

в котором переменные x и y разделены. Проинтегрируем обе части уравнения: $\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + C$. Полученное соотношение является общим интегралом уравнения.

Пример 4. Проинтегрировать уравнение $y' = \cos^2 y \cdot e^x$.

Пусть уравнение задано в виде

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0\,.$$

Такое уравнение называется *дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными* в симметрической форме.

Для разделения переменных нужно обе части уравнения разделить на $N_1(y)M_2(x)$:

$$\frac{M_1(x)N_1(y)dx}{N_1(y)M_2(x)} + \frac{M_2(x)N_1(y)dy}{N_1(y)M_2(x)} = 0 \quad \text{или}$$

$$\frac{M_1(x)N_1(y)}{N_1(y)M_2(x)}dx + \frac{M_2(x)N_1(y)}{N_1(y)M_2(x)}dy = 0\,.$$

Полученное уравнение называется *дифференциальным уравнением с разделёнными переменными*. Проинтегрируем уравнение:

$$\int \frac{M_1(x)N_1(y)}{N_1(y)M_2(x)}dx + \int \frac{M_2(x)N_1(y)}{N_1(y)M_2(x)}dy = C\,.$$

Соотношение является общим интегралом дифференциального уравнения .

К перечню вопросов

7.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Уравнение

$$y'+p(x)y=q(x)$$

называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*. Неизвестная функция $y(x)$ и её производная входят в это уравнение линейно, а функции $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны в интервале $(a;b)$.

Если $q(x)\equiv 0$, то уравнение

$$y'+p(x)y=0$$

называется *линейным однородным*, иначе – *линейным неоднородным*.

Для нахождения решения линейного однородного дифференциального уравнения обычно используют *метод подстановки (Бернулли)*, суть которого в следующем.

Решение уравнения будем искать в виде произведения двух функций

$$y(x)=u(x)v(x),$$

где $u(x)$ и $v(x)$ – некоторые непрерывные в интервале $(a;b)$ функции. Подставим $y=uv$ и производную $y'=u'v+uv'$ в уравнение: $u'v+uv'+p(x)uv=q(x)$ или $u'v+u\left(v'+p(x)v\right)=q(x)$. Функцию v будем подбирать таким образом, чтобы $v'+p(x)v=0$. Тогда $u'v=q(x)$.

В результате решения этих простейших дифференциальных уравнений получим:

$$\frac{dv}{dx}+p(x)v=0,\ \frac{dv}{dx}=-p(x)dx,\ \int\frac{dv}{dx}=-\int p(x)dx,$$

$\ln|v|=-\int p(x)dx+\ln|C|$, $v=Ce^{-\int p(x)dx}$. В качестве функции $v(x)$ можно взять одно из частных решений однородного уравнения, т.е. при C=1: $v=e^{-\int p(x)dx}$. Подставим во второе уравнение: $u'e^{-\int p(x)dx}=q(x)$ или $u'=e^{\int p(x)dx}q(x)$. Тогда $u=\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+C$.

Таким образом, общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка имеет вид $y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C\right)$.

К перечню вопросов