МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ,
НАУКИ И КАДРОВОЙ ПОЛИТИКИ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
ОРДЕНОВ ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

С. В. Курзенков

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ПРАКТИКУМ

Горки
БГСХА
2023

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гусак, А. Н. Высшая математика: в 2 т. / А. Н. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2000. – Т. 2. – 448 с.

2. Рябушко, А. П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: учеб. пособие. В 3 ч. Ч. 2 / А. П. Рябушко, В.В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; Под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 1991. – 352 с.

3. Рябушко, А. П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: учеб. пособие. В 3 ч. Ч. 3 / А. П. Рябушко, В.В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть; Под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 1991. – 288 с.

4. Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математике. В 4 ч. Ч. 4 Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика: учеб. пособие / А. П. Рябушко. – 2-е изд., испр. – Минск: Вышэйшая школа, 2007. – 336 с.

5. Минорский, В. П. Сборник задач по высшей математике /В. П. Минорский. – М.: Высшая школа, 1987.

6. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. – 10-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2011. – 608 с.

1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Занятие 1. Непосредственное интегрирование функций

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

Совокупность всех первообразных функций $F(x) + C$ для функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$.

Процесс нахождения первообразной функции называется *интегрированием*. Переменная x называется *переменной интегрирования*, функция $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)\mathrm{d}x$ – *подынтегральным выражением*.

Неопределенный интеграл обладает свойствами, использование которых в значительной степени может упростить интегрирование функций:

1) Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т. е. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$.

2) Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т. е. $\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x)\mathrm{d}x$.

3) Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной, т. е. $\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$.

4) Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла: $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

5) Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т. е. $\int \big(f(x) \pm g(x)\big)\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

6) Результат интегрирования не зависит от обозначения переменной интегрирования, т. е. если $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$, то при замене переменной интегрирования x на t $\int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + C$. Такое свойство называется *инвариантностью формулы интегрирования*.

7) Если известно, что $\int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + C$, то $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Правила интегрирования основных элементарных функций задаются основной таблицей неопределенных интегралов:

1.	$\int \mathrm{d}x = x + C;$	2.	$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;$
3.	$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C;$	4.	$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln(a)} + C;$
5.	$\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C;$	6.	$\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + C;$
7.	$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C;$	8.	$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x = \mathrm{tg}(x) + C;$
9.	$\int \frac{1}{\sin^2(x)}\mathrm{d}x = -\mathrm{ctg}(x) + C;$	10.	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin(x) + C;$
11.	$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}(x) + C.$		

Метод непосредственного интегрирования состоит в том, чтобы заданный интеграл с помощью алгебраических преобразований и свойств свести к одному из табличных интегралов.

Пример 1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int x^6 \mathrm{d}x$;

б) $\int \left(2x^3 - 4x^2 + 5\right) \mathrm{d}x$;

в) $\int \left(x^2 - \dfrac{1}{x} + e^x - 4\sin x + \dfrac{1}{\cos^2(x)} \right) \mathrm{d}x$;

г) $\int \left(3\sqrt[4]{x^3} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{1+x^2} \right) \mathrm{d}x$.

д) $\int \sin\left(3x-4\right) \mathrm{d}x$.

Решения:

а) $\int x^6 \mathrm{d}x = \dfrac{x^{6+1}}{6+1} + C = \dfrac{x^7}{7} + C$;

б) $\int \left(2x^3 - 4x^2 + 5\right) \mathrm{d}x = 2\int x^3 \mathrm{d}x - 4\int x^2 \mathrm{d}x + 5\int \mathrm{d}x = 2 \cdot \dfrac{x^4}{4} - 4 \cdot \dfrac{x^3}{3} +$

$+5 \cdot x + C = \dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{4}{3}x^3 + 5x + C$;

в) $\int \left(x^2 - \dfrac{1}{x} + e^x - 4\sin(x) + \dfrac{1}{\cos^2(x)} \right) \mathrm{d}x = \int x^2 \mathrm{d}x - \int \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x + \int e^x \mathrm{d}x -$

$-4\int \sin(x) \mathrm{d}x + \int \dfrac{1}{\cos^2(x)} \mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} - \ln|x| + e^x - 4 \cdot (-\cos(x)) + \mathrm{tg}(x) + C =$

$= \dfrac{x^3}{3} - \ln|x| + e^x + 4\cos(x) + \mathrm{tg}(x) + C$;

г) $\int \left(3\sqrt[4]{x^3} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{1+x^2} \right) \mathrm{d}x = 3\int x^{\frac{3}{4}} \mathrm{d}x - 2\int \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \mathrm{d}x + \int \dfrac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x =$

$= 3\int x^{\frac{3}{4}} \mathrm{d}x - 2\int x^{-\frac{1}{3}} \mathrm{d}x + \int \dfrac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = 3 \cdot \dfrac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} - 2 \cdot \dfrac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + \mathrm{arctg}(x) + C =$

$= 3 \cdot \dfrac{4 \cdot x^{\frac{7}{4}}}{7} - 2 \cdot \dfrac{3 \cdot x^{\frac{2}{3}}}{2} + \mathrm{arctg}(x) + C = \dfrac{12}{7}\sqrt[4]{x^7} - 3\sqrt[3]{x^2} + \mathrm{arctg}(x) + C$.

д) $\int \sin\left(3x-4\right) \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \text{см. свойство. 7,} \\ \text{формула 6 табл.} \end{array} \right| = -\dfrac{1}{3}\cos(3x-4) + C.$

Задания к аудиторному занятию 1

1. Вычислить интегралы:

а) $\int x^3 \mathrm{d}x$; б) $\int \frac{x^{15}}{3} \mathrm{d}x$; в) $\int x^{106} \mathrm{d}x$; г) $\int 2x^{99} \mathrm{d}x$;

д) $\int \frac{16}{x^5} \mathrm{d}x$; е) $\int \frac{2}{3x^{15}} \mathrm{d}x$; ж) $\int \frac{2}{x^{203}} \mathrm{d}x$; з) $\int \frac{49}{x^{99}} \mathrm{d}x$;

и) $\int \sqrt[3]{x^5} \mathrm{d}x$; к) $\int \frac{3}{4\sqrt{x^3}} \mathrm{d}x$; л) $\int 4\sqrt[7]{x^2} \mathrm{d}x$; м) $\int \frac{7}{2\sqrt[7]{x^3}} \mathrm{d}x$.

2. Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием:

а) $\int \left(5x^4 - \frac{3}{x^4} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) \mathrm{d}x$; б) $\int \left(2x - 4\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^3}\right) \mathrm{d}x$;

в) $\int \left(x^3 - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{5}{x^6}\right) \mathrm{d}x$; г) $\int \left(x^2 + \frac{3}{x^4} - 8\sqrt[5]{x^3}\right) \mathrm{d}x$;

д) $\int \left(8x - \frac{5}{x^6} + \frac{6}{\sqrt[5]{x^3}}\right) \mathrm{d}x$; е) $\int \left(4x^3 + 8\sqrt[5]{x^3} - \frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x$;

ж) $\int \left(3x - 4\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x^3}\right) \mathrm{d}x$; з) $\int \left(4 - \frac{6}{\sqrt[5]{x^3}} - 7\sqrt[6]{x}\right) \mathrm{d}x$;

и) $\int \left(3^x - \frac{2}{x} + 4\sin(x)\right) \mathrm{d}x$; к) $\int \left(e^x - \frac{3}{2\cos^2(x)} + \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right) \mathrm{d}x$;

л) $\int \left(\frac{8}{1+x^2} - \frac{2}{\cos^2(x)} + \frac{\cos(x)}{7}\right) \mathrm{d}x$; м) $\int \left(\frac{7}{\sqrt[3]{x}} + \frac{6}{\sin^2(x)} + \frac{2}{x\ln(3)} - 1\right) \mathrm{d}x$.

3. Найти неопределенные интегралы непосредственным интегрированием:

а) $\int \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{x} \mathrm{d}x$; б) $\int \frac{\sqrt{x} - 1 + x\sqrt{x}e^x}{\sqrt{x^3}} \mathrm{d}x$;

в) $\int \frac{\cos^3 x - 8\sqrt[5]{x^3} \cdot \cos^2 x + 3}{\cos^2 x} \mathrm{d}x$; г) $\int \frac{5x^2 - 2\sqrt{x^3} + \sqrt{x}\sin x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$;

д) $\int \sin(7x+4) \mathrm{d}x$; е) $\int \cos(\frac{x}{7} + 12) \mathrm{d}x$;

ж) $\int\left(\frac{2}{3}x+5\right)^5\mathrm{d}x$;

з) $\int\frac{6}{(4x+5)^3}\mathrm{d}x$;

и) $\int\frac{5}{\cos^2(2-3x)}\mathrm{d}x$;

к) $\int\frac{1}{\sqrt{1-5x^2}}\mathrm{d}x$;

л) $\int\frac{11}{\sin^2(5+9x)}\mathrm{d}x$;

м) $\int\frac{3}{1+9x^2}\mathrm{d}x$.

Домашнее задание к занятию 1

Вычислить интегралы:

а) $\int\left(4x^3+5\sqrt[3]{x^2}-\frac{3}{x^4}-2\right)\mathrm{d}x$;

б) $\int\left(3-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{4}{x^5}\right)\mathrm{d}x$;

в) $\int\frac{(1-x)^2-x^2\cos(x)}{x^2}\mathrm{d}x$;

г) $\int\frac{\cos^2(x)-\sin(x)\cos^2(x)+1}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x$;

д) $\int\sin(8-7x)\,\mathrm{d}x$;

е) $\int\cos(4x+1)\,\mathrm{d}x$;

ж) $\int(7x+5)^4\mathrm{d}x$;

з) $\int\frac{1}{(9x-3)}\mathrm{d}x$;

и) $\int\frac{3}{\cos^2(4-5x)}\mathrm{d}x$;

к) $\int\frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\mathrm{d}x$;

л) $\int\frac{7}{\sin^2(2+3x)}\mathrm{d}x$;

м) $\int\frac{8}{1+6x^2}\mathrm{d}x$.

З а н я т и е 2. Замена переменной и формула интегрирования по частям в неопределенном интеграле

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

Метод *замены переменной* (*подстановки*) помогает значительно упростить подынтегральное выражение и свести интеграл к одной из формул таблицы.

Если обозначить $x=s(t)$, $\mathrm{d}x=s'(t)\mathrm{d}t$ и сделать соответствующие преобразования в заданном подынтегральном выражении, полученный интеграл при удачном выборе функции $s(t)$ может оказаться более простым или даже табличным. Тогда справедлива формула замены в неопределенном интеграле:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(s(t))s'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Пример 2. Найти интегралы:

$$\text{а) } \int \sqrt[5]{3x-4}\,\mathrm{d}x\,; \quad \text{б) } \int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x\,; \quad \text{в) } \int \frac{x^2-1}{x^3-3x+5}\,\mathrm{d}x.$$

Решения:

а) $\int \sqrt[5]{3x-4}\,\mathrm{d}x = |t = 3x-4,\ \mathrm{d}t = 3\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{3}| = \int \sqrt[5]{t}\,\frac{\mathrm{d}t}{3} = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{5}}\mathrm{d}t =$

$= \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + C = \frac{5}{18}\sqrt[5]{t^6} + C = \frac{5}{18}\sqrt[5]{(3x-4)^6} + C\,;$

б) $\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = |\,t = x^2,\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x,\ x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2}\,| = \int e^t\,\frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{2}\int e^t\mathrm{d}t =$

$= \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C\,;$

в) $\int \frac{x^2-1}{x^3-3x+5}\,\mathrm{d}x = |\,t = x^3-3x+5,\ \mathrm{d}t = \left(3x^2-3\right)\mathrm{d}x = 3\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x\,,$

$\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{3}\,| = \int \frac{\frac{\mathrm{d}t}{3}}{t} = \frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln\left|x^3-3x+5\right| + C.$

При вычислении неопределенных интегралов довольно-таки распространен случай, когда подынтегральная функция представляет собой дробь, у которой числитель есть производная знаменателя. В этом случае такой интеграл равен логарифму натуральному от абсолютной величины знаменателя, т. е. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$.

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\ln(x)}$.

Решение. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\ln(x)} = \int \frac{\left(\ln(x)\right)'}{\ln(x)}\mathrm{d}x = \ln(\ln(x)) + C$.

Формула интегрирования по частям в неопределенном интеграле имеет следующий вид $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$.

Если в результате применения этой формулы окажется, что интеграл в правой части формулы проще, чем в левой, то ее применение считается оправданным. В ходе использования данного метода интегрирования удобно руководствоваться следующими рекомендациями:

- в интегралах вида $\int P(x)e^{kx}\mathrm{d}x$, $\int P(x)\sin(x)\mathrm{d}x$, $\int P(x)\cos(x)\mathrm{d}x$ имеет смысл положить $u = P(x)$, а в качестве dv взять оставшуюся часть подынтегрального выражения;
- в интегралах вида $\int P(x)\arcsin(x)\mathrm{d}x$, $\int P(x)\arccos(x)\mathrm{d}x$, $\int P(x)\mathrm{arctg}(x)\mathrm{d}x$, $\int P(x)\mathrm{arcctg}(x)\mathrm{d}x$, $\int P(x)\ln(x)\mathrm{d}x$ следует положить $\mathrm{d}v = P(x)\,\mathrm{d}x$, а оставшуюся часть подынтегрального выражения обозначить через u;

Пример 4. Найти интегралы:

а) $\int x\cos(x)\mathrm{d}x$; б) $\int (2x+1)e^{3x}\mathrm{d}x$; в) $\int \ln(x)\mathrm{d}x$.

Р е ш е н и е. а) $\int x\cos(x)\mathrm{d}x = |\ u = x,\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x,\ \mathrm{d}v = \cos(x)\mathrm{d}x,$

$\int \mathrm{d}v = \int \cos(x)\mathrm{d}x,\ v = \sin(x)\ | = x\sin(x) - \int \sin(x)\mathrm{d}x = x\sin(x) + \cos(x) + C$;

б) $\int (2x+1)e^{3x}\mathrm{d}x = |\ u = 2x+1,\ \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}v = e^{3x}\mathrm{d}x,\ \int \mathrm{d}v = \int e^{3x}\mathrm{d}x,$

$$v = \frac{1}{3}e^{3x}\ | = (2x+1)\cdot\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\cdot 2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{3}\int e^{3x}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{3x} + C = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C =$$

$$= \frac{1}{3}e^{3x}\left(2x + \frac{1}{3}\right) + C;$$

в) $\int \ln(x)\mathrm{d}x = |\ u = \ln(x),\ \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x,\ \int \mathrm{d}v = \int \mathrm{d}x,\ v = x\ | =$

$$= x\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int \mathrm{d}x = x\ln(x) - x + C;$$

Задания к аудиторному занятию 2

1. Найти неопределенные интегралы методом замены переменной:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(4x-3)^2}}$; б) $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{4+x^5}}$;

в) $\int \frac{dx}{\cos^2(x)\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}}$; г) $\int \cos^3(x)\cdot\sin(x)\,dx$;

д) $\int 3e^{-x^3}x^2 dx$; е) $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$;

ж) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}$; з) $\int \frac{\sin x}{\cos^4(x)}dx$;

и) $\int \frac{\ln(x+3)}{x+3}dx$; к) $\int \frac{e^{2x}dx}{\left(1+e^{2x}\right)^2}$;

л) $\int \frac{5x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$; м) $\int \mathrm{e}^{\sin(3x)}\cdot\cos(3x)\,dx$.

2. Найти неопределенные интегралы методом интегрирования по частям:

а) $\int (3x-4)\cos(x)\,dx$; б) $\int (2x+5)e^{6x-2}\,dx$;

в) $\int \sqrt{x}\ln(x)\,dx$; г) $\int x\operatorname{arctg}(x)\,dx$;

д) $\int e^x\sin(x)\,dx$; е) $\int e^{2x}\cos(x)dx$;

ж) $\int (x^2+2)\cdot \mathrm{e}^{-x}dx$; з) $\int x\sin(4x)dx$;

и) $\int \frac{\ln(x)}{x^3}dx$; к) $\int \arcsin(x)dx$.

Домашнее задание к занятию 2

Вычислить интегралы.

а) $\int \frac{\cos(x)}{\sin^3(x)}dx$; б) $\int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2+1}}$;

в) $\int e^{\sin(3x)}\cdot\cos(3x)\,dx$; г) $\int \frac{\operatorname{arctg}^2(2x)}{1+4x^2}dx$;

д) $\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$; е) $\int e^{x^4+6}x^3 dx$;

ж) $\int x\cos(3x-4)\,\mathrm{d}x$; з) $\int (5x-8)\sin\left(\frac{x}{4}\right)\mathrm{d}x$;

и) $\int \sqrt[3]{x^3}\ln(x)\,\mathrm{d}x$; к) $\int \arccos(x)\,\mathrm{d}x$.

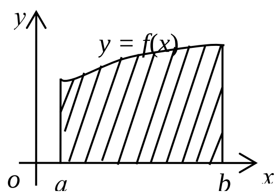
Занятие 3. Применение определенных интегралов для вычисления площадей плоских фигур

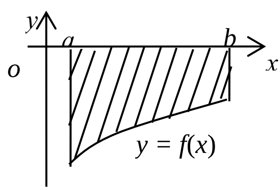
Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана непрерывная функция $y = f(x) \geq 0$. Фигура, ограниченная сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу осью Ox, сбоку прямыми $x = a$ и $x = b$, называется *криволинейной трапецией*.

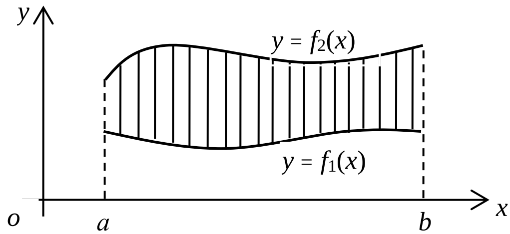
Определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции. В этом состоит *геометрический смысл определенного интеграла*, который применяется при вычислении площадей плоских фигур.

Согласно геометрическому смыслу определенного интеграла площадь криволинейной трапеции, расположенной выше оси абсцисс, равна определенному интегралу от функции $f(x)$: $S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Если фигура расположена ниже оси абсцисс, то ее площадь вычисляется по формуле $S = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.





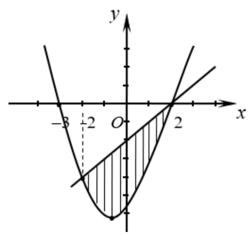
Пусть фигура ограничена графиками функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$.



Тогда площадь фигуры, ограниченной этими линиями, вычисляется по формуле: $S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) \mathrm{d}x$.

Пример 15. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + x - 6$, $y - x + 2 = 0$.

Решение. Графиком функции $y = x^2 + x - 6$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем точки пересечения параболы с осью Ox $x^2 + x - 6 = 0$, $D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$, $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. Уравнение прямой $y - x + 2 = 0$ запишем в виде $y = x - 2$. Изобразим эти линии в системе координат и вычислим площадь заштрихованной фигуры.



Найдем абсциссы точек пересечения линий: $x^2 - 4 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Тогда площадь заштрихованной фигуры равна

$$\int_{-2}^{2} (x - 2 - (x^2 + x - 6))\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{x^3}{3} + 4x \right)\Bigg|_{-2}^{2} =$$

$$= -\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2 - \left(-\frac{(-2)^3}{3} + 4 \cdot (-2) \right) = -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 = 10\frac{2}{3} \text{(кв. ед.)}.$$

Задания к аудиторному занятию 3

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

а) $y=6x-x^2,\quad y=0;$ б) $y=x^2-4,\quad x=4,\quad y=0;$

в) $y=x^2,\ y=8-x^2;$ г) $y=-x^2,\ x+y+2=0;$

д) $y=x,\ y=(x-2)^2,\ y=0;$ е) $y=\sqrt{x},\ y=\sqrt[3]{x}.$

Домашнее задание к занятию 8

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной заданными линиями.

а) $xy=6,\quad y=7-x;$ б) $4y=8x-x^2,\ 4y=x+6.$

2. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Занятие 1. Простейшие ДУ 1 порядка, их решение

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

Уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производные, называется *обыкновенным дифференциальным уравнением* (ДУ). *Порядком дифференциального уравнения* называется порядок высшей производной, входящей в это уравнение.

Например, ДУ n-го порядка представляется в следующем виде:

$$F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0,$$

где x – независимая переменная;

y – искомая функция;

$y',y'',\ldots,y^{(n)}$ – производные искомой функции до n-го порядка включительно.

Рассмотрим ДУ $F(x,y,y')=0.$ Его можно охарактеризовать как *дифференциальное уравнение первого порядка*, так как в него входит независимая переменная x, искомая функция $y(x)$ и производная только первого порядка y' от искомой функции. Если в этом уравнении можно выразить производную искомой функции и записать его в виде

$$y'=f(x,y),$$

то такое уравнение называется *дифференциальным уравнением первого порядка в нормальной форме*.

Решением ДУ называется любая функция $y=\varphi(x)$, которая при подстановке ее в уравнение обращает это уравнение в тождество

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x))\equiv 0,\ \text{или}\ \varphi'(x)\equiv f(x,\varphi(x)).$$

Процесс нахождения всех решений дифференциального уравнения называется его *интегрированием*, а график решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения – *интегральной кривой* этого уравнения. Если решение дифференциального уравнения получено в виде $\Phi(x, y) = 0,$ то оно называется *интегралом* данного дифференциального уравнения.

Общим решением ДУ называется семейство функций вида $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n, ...),$ каждая из которых является решением ДУ при любом допустимом значении произвольных постоянных C_1, C_2, …, C_n, а количество этих произвольных постоянных соответствует порядку ДУ. Таким образом, дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, получаемое из формулы общего решения при подстановке в нее конкретных значений произвольных постоянных C_1, C_2, …, C_n.

Чтобы из этого множества решений ДУ выделить одно решение, которое называется частным, нужно задать некоторые дополнительные условия.

Задача отыскания частного решения уравнения при заданных условиях называется *задачей Коши*.

Простейшим ДУ первого порядка является дифференциальное уравнение, не содержащее искомой функции $y' = f(x)$. Его решение производится путем однократного интегрирования левой и правой частей:

$$\int y'dy = \int f(x)\,dx, \quad \text{или} \quad y = \int f(x)\,dx.$$

Пример 1. Найти общее решение ДУ $y' = 3x^2 - \sqrt[4]{x}$.

Решение. Проинтегрируем левую и правую части этого ДУ:

$$\int y'dy = \int (3x^2 - \sqrt[4]{x})dx, \quad y = 3\int x^2 dx - \int x^{\frac{1}{4}} dx, \quad y = \frac{3x^3}{3} - \frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + C,$$

$y = x^3 - \dfrac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} + C$ – общее решение ДУ.

Дифференциальными уравнениями первого порядка с разделяющимися переменными называются уравнения следующих видов (или сводящиеся к ним):

1) $P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0$ (дифференциальная форма записи ДУ);

2) $P_1(x)Q_1(y)y' + P_2(x)Q_2(y) = 0$ (запись ДУ через производную искомой функции).

Связь между данными формами записи ДУ первого порядка с разделяющимися переменными осуществляется через дифференциальную запись производной искомой функции $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Чтобы решить ДУ первого порядка с разделяющимися переменными, необходимо выполнить следующие действия:

1. Разделить в уравнении переменные, т. е. преобразовать уравнение таким образом, чтобы выражения с разноименными переменными оказались в различных его частях, при этом дифференциалы этих переменных были в числителях преобразованных частей.

Для ДУ в дифференциальной форме данное действие будет выглядеть следующим образом:

$$P_2(x)Q_2(y)dy = -P_1(x)Q_1(y)dx,\ \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = -\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx,$$

а для ДУ, записанного через производную, –

$$P_1(x)Q_1(y)\frac{dy}{dx} = -P_2(x)Q_2(y),\ \frac{Q_1(y)}{Q_2(y)}dy = -\frac{P_2(x)}{P_1(x)}dx.$$

Разделение переменных в ДУ можно представить как деление обеих частей уравнения на произведение некоторых функций, одна из которых зависит только от x, а другая – только от y: $P(x)Q(y)$. Поэтому следует помнить, что при почленном делении частей ДУ на переменные величины могут быть потеряны *особые* его решения, которые не могут быть получены из общего решения уравнения. Особые решения ДУ следует искать из уравнения $P(x)Q(y) = 0$.

2. Проинтегрировать левую и правую части преобразованного уравнения по соответствующим переменным. В результате интегрирования частей образуется равенство, которое будем воспринимать как общее решение заданного ДУ, записанное в неявном виде. Если из него выразить искомую функцию, то общее решение примет явный вид.

Пример 2. Решить ДУ $y' = y^2$.

Решение. Уравнение $y' = y^2$ можно охарактеризовать как ДУ первого порядка с разделяющимися переменными, записанное через производную. Заменив в нем производную искомой функции $y'=\frac{dy}{dx}$, получим дифференциальную форму записи ДУ: $\frac{dy}{dx}=y^2$..

1. Разделим в нем переменные: $\frac{dy}{y^2}=dx$.

2. Проинтегрируем части этого равенства: $\int\frac{dy}{y^2}=\int dx.$ В результате получим: $-\frac{1}{y}=x+C$ – общее решение ДУ, записанное в неявном виде. Выразим из данного равенства искомую функцию:

$$y=-\frac{1}{x+C}\ \text{– явный вид общего решения ДУ.}$$

В данном случае разделение переменных в ДУ производилось почленным делением его частей на y (т. е. уравнение $P(x)Q(y)=0$ имело вид $y=0$). Очевидно, что $y=0$ является особым решением данного ДУ, так как оно не может быть получено из общего его решения.

Пример 3. Решить ДУ $(xy^2+y^2)dx+(x^2-x^2y)dy=0.$

Решение. Уравнение $(xy^2+y^2)dx+(x^2-x^2y)dy=0$ можно охарактеризовать как ДУ первого порядка с разделяющимися переменными, записанное в дифференциальной форме.

1. Слагаемое, содержащее дифференциал искомой функции, оставим в левой части уравнения, а первое слагаемое перенесем в его правую часть, вынесем за скобки в образованных частях общие множители и разделим переменные:

$$(x^2-x^2y)dy=-(xy^2+y^2)dx,\ x^2(1-y)dy=-y^2(x+1)dx,$$

$$\frac{(1-y)}{y^2}dy=-\frac{(x+1)}{x^2}dx.$$

Упростим полученное уравнение:

$$\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y}\right)dy=-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx.$$

2. Проинтегрируем части этого равенства:

$$\int\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y}\right)dy=-\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx.$$

Получим: $-\dfrac{1}{y}-\ln|y|=\dfrac{1}{x}-\ln|x|+C$ – общее решение ДУ, записанное в неявном виде. Так как из равенства выразить искомую функцию y нельзя, то записать явный вид данного решения не представляется возможным.

В данном случае разделение переменных в ДУ производилось почленным делением его частей на x^2y^2 (т. е. уравнение $P(x)Q(y) = 0$ имело вид $x^2y^2 = 0$). Очевидно, что $x = 0$, $y = 0$ является особым решением данного ДУ, так как оно не может быть получено из общего его решения.

Если в процессе интегрирования частей ДУ с разделенными переменными результаты записываются в виде натуральных логарифмов, то целесообразно и произвольную константу представлять в виде натурального логарифма. Это позволит упростить запись общего решения ДУ. Рассмотрим это на примере.

Пример 4. Решить ДУ $\mathrm{tg}(x)yy'-2y^2+1=0$.

Решение. Уравнение $\mathrm{tg}(x)yy'-2y^2+1=0$ можно охарактеризовать как ДУ первого порядка с разделяющимися переменными, записанное через производную. Заменим в ДУ производную искомой функции $y'=\dfrac{dy}{dx}$, а второе и третье слагаемые перенесем в его правую часть. В результате получим: $\mathrm{tg}(x)y\dfrac{dy}{dx}=2y^2-1$.

1. Разделим в полученном равенстве переменные:

$$\frac{y}{2y^2-1}dy=\mathrm{ctg}(x)dx.$$

2. Проинтегрируем части этого равенства:

$$\int\frac{y}{2y^2-1}dy=\int\mathrm{ctg}(x)dx.$$

Выпишем результат интегрирования левой части:

$$\int\frac{y}{2y^2-1}dy=\left|\begin{aligned}&t=2y^2-1\\&dt=4ydy\\&ydy=\frac{dt}{4}\end{aligned}\right|=\int\frac{1}{t}\frac{dt}{4}=\frac{1}{4}\int\frac{1}{t}dt=\frac{1}{4}\ln|t|+C=\frac{1}{4}\ln\left|2y^2-1\right|+C.$$

Выпишем результат интегрирования правой части:

$$\int \operatorname{ctg}(x)dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx = \begin{vmatrix} t = \sin(x) \\ dt = \cos(x)dx \end{vmatrix} = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C = \ln|\sin(x)| + C.$$

Тогда общим решением ДУ, записанным в неявном виде, будет:

$$\frac{1}{4}\ln\left|2y^2 - 1\right| = \ln|\sin(x)| + \ln|C|,\ \ln\left|2y^2 - 1\right|^{\frac{1}{4}} = \ln|C\sin(x)|,$$

$$\text{или } \sqrt[4]{2y^2 - 1} = C\sin(x).$$

В явном виде общее решение этого ДУ запишется как

$$y = \pm\sqrt{C_1\sin^4(x) + \frac{1}{2}},$$

где $C_1 = \dfrac{C^4}{2}$.

В данном случае разделение переменных в ДУ производилось почленным делением его частей на $\operatorname{tg}(x)(2y^2–1)$ (т. е. уравнение $P(x)Q(y) = 0$ имело вид $\operatorname{tg}(x)(2y^2–1) = 0$). Но решение $x = \pi n$, $n \in Z$, $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ входит в общее решение данного ДУ, поэтому оно не будет являться особым.

Задания к аудиторному занятию 1

1. Найти общее решение ДУ:

1) $y' = x^3 - 4x^2 + 7x - 9$;

2) $y' = 2x^4 - \dfrac{3}{x^3} + 7\sqrt[4]{x^5} - 12$;

3) $y' = 4\sin(2x) - 4e^{x^2} + 7\operatorname{tg}(3x) - 15$;

4) $y' = \ln(x) - \dfrac{3}{\sqrt[5]{x^3}} + \arcsin(7x)$;

5) $y' = (4x - 6x^7 + 3)^9$;

6) $y' = \operatorname{arctg}^5(x^{25} - 6x^8 + 13)$.

2. Найти частное решение ДУ:

1) $y' = 5x^2 - 2x^3 + 4x - 1$, если $y(–1) = 16$;

2) $y' = x^4 - \dfrac{3}{x^6} + 7\sqrt[3]{x^2} - 2$, если $y(1) = –2$;

3) $y' = 6\cos(3x) - \dfrac{6}{\pi}$, если $y(\dfrac{\pi}{6}) = –12$;

4) $y' = \ln(4x) + \dfrac{2}{e}$, если $y(\dfrac{e}{4}) = 9$;

5) $y' = (2x^2 - 7x + 1)^3$, если $y(0) = 106$;

6) $y' = \arcsin^2(x - 6x^2 + 22)$, если $y(2) = -4$.

3. Решить задачу Коши для дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными:

1) $\operatorname{tg}(y)dx - x\ln(x)dy = 0, \quad y(e) = \dfrac{\pi}{2}$;

2) $x(y^2 + 1)dx + y(1 - x^2)dy = 0, \quad y(0) = \sqrt{3}$;

3) $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0, \quad y(0) = \sqrt{6}$;

4) $\sqrt{3 + y^2}\,dx = (y + x^2 y)dy, \quad y(\dfrac{\pi}{4}) = 1$;

5) $y(e^x + 4)dy - e^x dx = 0, \quad y(0) = 5$;

6) $y' = (2y - 1)\operatorname{ctg}(x), \quad y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 5$.

Домашнее задание к занятию 1

1. Найти частное решение ДУ:

1) $2y(x^2 + 1)y' - \sqrt{y^2 + 2} = 0, \quad y(\dfrac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$;

2) $(1 + x^2)dy = 2x(y + 3)dx, \quad y(0) = -2$;

3) $(e^x + 8)dy - ye^x dx = 0, \quad y(0) = 7$;

4) $(1 + x^2)y' - 2xy = 0, \quad y(0) = 1$.

Занятие 2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Основные формулы и понятия, необходимые при решении задач

Уравнение $y' + p(x)y = q(x)$ называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*.

Неизвестная функция $y(x)$ и ее производная входят в это уравнение линейно, а функции $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны в интервале $(a;\, b)$.

Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение $y' + p(x)y = 0$ называется *линейным однородным*, если $q(x) \neq 0$ – *линейным неоднородным*.

В линейном однородном уравнении $y' + p(x)y = 0$ переменные разделяются: $\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx,$ и поэтому его интегрирование сводится к вычислению интегралов от обеих частей равенства:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)\,dx + C.$$

Для нахождения решения линейного неоднородного дифференциального уравнения обычно используют *метод подстановки (Бернулли)*, суть которого заключается в следующем.

Решение уравнения будем искать в виде произведения двух функций:

$$y(x) = u(x)v(x),$$

где $u(x)$ и $v(x)$ – некоторые непрерывные в интервале $(a;\, b)$ функции.

Подставим $y = uv$ и производную $y' = u'v + uv'$ в уравнение:

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x), \text{ или } u'v + u\big(v' + p(x)v\big) = q(x).$$

Функцию v будем подбирать таким образом, чтобы $v' + p(x)v = 0$. Тогда $u'v = q(x)$.

В результате решения этих простейших дифференциальных уравнений получим:

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0, \ \frac{dv}{dx} = -p(x)dx, \ \int \frac{dv}{dx} = -\int p(x)dx,$$

$$\ln|v| = -\int p(x)dx + \ln|C|, \ v = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

В качестве функции $v(x)$ можно взять одно из частных решений однородного уравнения, т. е. при $C = 1$ $v = e^{-\int p(x)dx}$. Подставим во второе уравнение:

$$u'e^{-\int p(x)dx} = q(x) \text{ или } u' = e^{\int p(x)dx}q(x).$$

Тогда $u = \int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + C.$ Таким образом, общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка имеет вид

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + C\right).$$

Пример 5. Решить уравнение $y'+\frac{1}{x}y=\frac{\sin(x)}{x}$.

Решение. Данное ДУ является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка. Его решение будем искать в виде $y(x)=u(x)v(x)$. Тогда производная этой функции может быть найдена по правилу дифференцирования произведения двух функций $y'=u'v+uv'$. Выполним подстановку этих выражений в заданное ДУ:

$$u'v+v'u+\frac{1}{x}uv=\frac{\sin(x)}{x}.$$

Сгруппируем второе и третье слагаемые левой части и из них функцию u вынесем за скобки. В результате получим:

$$u'v+u(v'+\frac{1}{x}v)=\frac{\sin(x)}{x}.$$

Ввиду произвольности выбора функций u и v функцию v можно выбрать таким образом, чтобы выражение в скобках левой части уравнения обнулялось. Тогда ДУ разобьется на два ДУ с разделяющимися переменными:

$$1)\ v'+\frac{1}{x}v=0; \qquad 2)\ u'v=\frac{\sin(x)}{x}.$$

Из первого ДУ найдем функцию v:

$$v'+\frac{1}{x}v=0,\ v'=-\frac{1}{x}v,\ \frac{dv}{dx}=-\frac{1}{x}v,\ \frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x},\ \int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|v|=-\ln|x|,\ \ \ln|v|=\ln\left|\frac{1}{x}\right|,\ \ln|v|=\ln\left|\frac{1}{x}\right|,\ v=\frac{1}{x}.$$

Подставим выражение функции v во второе ДУ и найдем из него функцию u:

$$u'v=\frac{\sin(x)}{x},\ u'\frac{1}{x}=\frac{\sin(x)}{x},\ u'=\sin(x),\ \frac{du}{dx}=\sin(x),\ du=\sin(x)dx,$$

$$\int du=\int\sin(x)dx,\ \ u=-\cos(x)+C.$$

Тогда общее решение заданного ДУ будет иметь следующий вид:

$$y(x) = (C-\cos(x))\,\frac{1}{x}\,.$$

Пример 6. Решить задачу Коши:

$$y'+2xy=2x^2e^{-x^2},\ \ y(0)=-5.$$

Решение. Положим, $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$.

Подставим y и y' в данное уравнение, сгруппируем второе и третье слагаемые левой части и из них функцию u вынесем за скобки:

$$u'v + u\,(v' + 2xv) = 2x^2 e^{-x^2}.$$

Тогда ДУ разобьется на два ДУ с разделяющимися переменными:

$$1)\ v' + 2xv = 0; \qquad 2)\ u'v = 2x^2 e^{-x^2}.$$

Из первого ДУ найдем функцию v:

$$v' + 2xv = 0,\ \frac{dv}{dx} = -2xv,\ \int \frac{dv}{v} = -2\int x dx,\ \ln|v| = -x^2,\ \ v = e^{-x^2}.$$

Подставим выражение функции v во второе ДУ и найдем из него функцию u:

$$u'v = 2x^2 e^{-x^2},\ u'e^{-x^2} = 2x^2 e^{-x^2},\ \frac{du}{dx} = 2x^2,\ du = 2x^2 dx,\ \int du = \int 2x^2 dx,$$

$$u = \frac{2}{3}x^3 + C.$$

Тогда общее решение заданного ДУ будет иметь вид

$$y = e^{-x^2}\left(\frac{2}{3}x^3 + C\right).$$

Найдем частное решение ДУ при условии, что $y(0) = -5$:

$$-5y = e^0\left(\frac{2}{3}\cdot 0 + C\right),\ C = -5.$$

Тогда решением поставленной задачи Коши будет функция

$$y = e^{-x^2}\left(\frac{2}{3}x^3 - 5\right).$$

Задания к аудиторному занятию 2

Решить задачу Коши для линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

1) $y' - \dfrac{1}{x}y = -\dfrac{2}{x^2}$, $\ y(1) = 1$;

2) $y' + y\cos(x) = \dfrac{1}{2}\sin(2x)$, $\ y(0) = 0$;

3) $y' - y\mathrm{ctg}(x) = 2x\sin(x)$, $\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$;

4) $y' + y\mathrm{tg}(x) = \cos^2(x), \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2};$

5) $y' - \frac{1}{x+2}y = x^2 + 2x, \quad y(-1) = \frac{3}{2};$

6) $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin(x)}{x}, \quad y(\pi) = 0;$

7) $y' - \frac{1}{x+1}y = e^x(x+1), \quad y(0) = 1.$

Домашнее задание к занятию 2

Найти частное решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

1) $y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}, \quad y(0) = 1;$ 2) $xy' + 2y = x^3, \quad y(-1) = 1;$

4) $y' - \frac{1}{x}y = x\sin(x), \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

У ч е б н о е и з д а н и е

Курзенков Сергей Владимирович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ПРАКТИКУМ