Численное решение нелинейных уравнений

Корнем уравнения $f(x)=0$ называется значение $x=\bar{x}$, подстановка которого в уравнение превращает его в верное числовое равенство. Например, если в уравнение $x^2+5x+4=0$ подставить $x=-1$, то получим $0=0$ (верно). **Решить** уравнение — значит найти его корни. Далеко не каждое уравнение допускает аналитическое решение:

1) трансцендентные уравнения, как правило, не решаются аналитически, за исключением специальных случаев («школьного» типа), когда уравнение можно удачной подстановкой свести к алгебраическому, например, $e^{2x}-6e^x+9=0$;

2) даже для алгебраического уравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$$

степени выше четвертой не существует формулы, выражающей корни через коэффициенты уравнения при помощи конечного числа арифметических операций и извлечения корней (в частных случаях, например для уравнения $x^{42}-5x^{21}+4=0$, такие формулы могут существовать, но в общем случае нет). Невозможность аналитического решения уравнений степени пятой и высших доказана трудами Абеля (1802–1829) и Галуа (1811–1832).

Таким образом, большое значение имеет задача приближенного, численного отыскания корней уравнений, для этого:

а) определяют количество корней уравнения и изолируют (отделяют) каждый из них. **Отрезком изоляции** называется отрезок, на котором лежит только один корень уравнения;

б) вычисляют каждый корень с требуемой точностью.

Для отделения корней уравнения $f(x)=0$ применяют *графический* и *аналитический* методы.

В первом из них строят график функции $y=f(x)$ и приближенно находят точки его пересечения с осью Ox.

Пример. Для отделения корней уравнения $x^2-4x+5=0$ строим график функции $f(x)=x^2-4x+5$ (рис. 8). График пересекает ось абсцисс в единственной точке на отрезке $[-3,-2]$, который и будет отрезком изоляции корня.

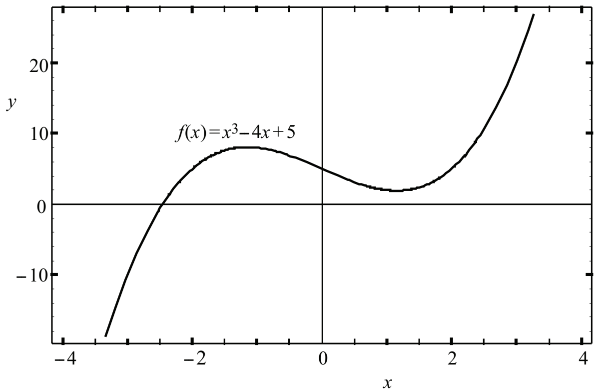

Рис. 8. Графическое отделение корней
(единственный корень уравнения $x^2 - 4x + 5 = 0$ лежит на отрезке $[-3, -2]$)

Аналитический способ отделения корней уравнения $f(x)=0$ основан на том, что для функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$ и принимающей на его концах значения разных знаков, существует по меньшей мере одна точка $\bar{x}\in[a,b]$, такая, что $f(\bar{x})=0$. Если на этом отрезке функция $f(x)$ монотонна, то корень $\bar{x}$ единственный, в противном случае корней может быть несколько (рис. 9).

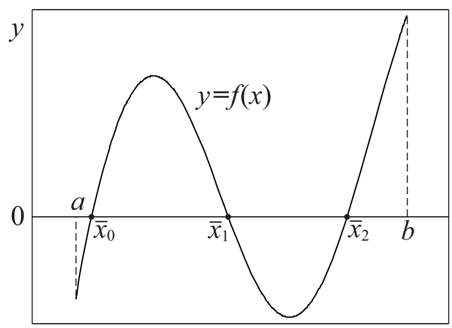

Рис. 9. Отделение корней в случае немонотонности функции[7]

[7] На концах отрезка $[a, b]$ функция $f(x)$ принимает значения разных знаков; поскольку она немонотонна на этом отрезке, то уравнение $f(x) = 0$ имеет несколько корней (точки $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2$).

Начнем теперь рассмотрение методов вычисления корней с заданной точностью.

Метод половинного деления (дихотомия[8])

Метод непосредственно следует из аналитического способа отделения корней. Пусть для уравнения $f(x)=0$ найден первичный отрезок $[x_0, x_1]$ изоляции корня. Вычислим середину отрезка $x_2 = \dfrac{x_0 + x_1}{2}$.

Если случайно окажется, что $f(x_2)=0$, то x_2 является корнем уравнения $f(x)=0$. Если же $f(x_2)\neq 0$, то из двух половин $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_1]$ первичного отрезка выберем для дальнейшего деления пополам ту, на концах которой функция $f(x)$ принимает значения противоположных знаков. Выбранный отрезок снова разделим пополам и найдем половину с противоположными знаками $f(x)$ на концах, и т. д.

Критерий достижения требуемой точности (критерий обрыва счета): если корень надо вычислить с точностью ε, то деление пополам следует продолжать до тех пор, пока длина очередного отрезка не станет меньше 2ε; тогда середина этого отрезка даст значение корня с точностью ε.

Свойства дихотомии следующие:

а) идейная простота метода;

б) непритязательность к свойствам функции $f(x)$ — она должна быть лишь непрерывной, а дифференцируемость не предполагается.

К сожалению, отрицательные свойства перевешивают:

в) очень медленная сходимость. Пусть, например, первичный отрезок изоляции имеет единичную длину. После первого шага дихотомии длина уменьшится до $1/2$, после второго — до $(1/2)^2$, и т. д. Поскольку $(1/2)^{10} = 1/1024 < 0{,}001$, после десяти шагов дихотомии обеспечиваются лишь три верных десятичных знака искомого корня[9];

г) неприменимость к вычислению корней четной кратности (рис. 10);

д) неприменимость к решению систем уравнений.

---

[8] Дихотомия (греч. Διχοτομία) — разрубание пополам, разделение надвое.

[9] Гора родила мышь.

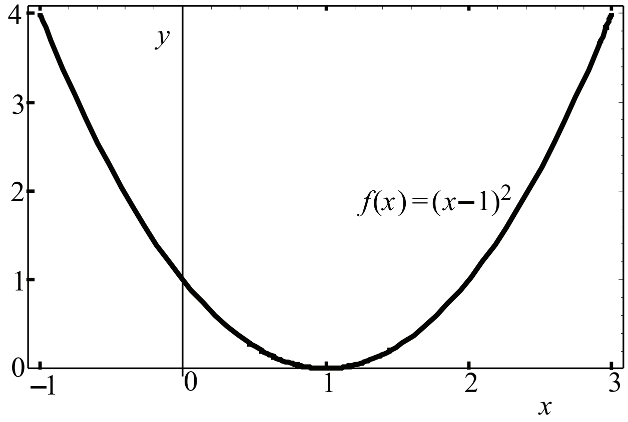

Рис. 10. Отделение корней: случай кратного корня[10]

Метод итераций (последовательных приближений)

Пусть имеется уравнение $f(x)=0$. Приведем его к равносильному виду $x=\varphi(x)$, удобному для итераций[11] (ниже покажем, как это сделать).

Выберем некоторое начальное приближение x_0 и найдем следующие приближения, выполняя однообразные вычисления (итерации),

$$x_1=\varphi(x_0),\, x_2=\varphi(x_1),\ldots,\, x_n=\varphi(x_{n-1}),$$

Отсюда понятно удобство для итераций перехода от записи уравнения в виде $f(x)=0$ к виду $x=\varphi(x)$: значение аргумента в левой части равенства является следующим приближением по отношению к тому, которое подставлялось в функцию $\varphi(x)$. При подстановке значения аргумента в $f(x)$ справа от знака равенства появляется число 0 без возможности итераций.

Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то итерационный процесс $x_n=\varphi(x_{n-1})$, $n=1,2,\ldots,$ называется сходящимся. Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна. Тогда, переходя к пределу $n\to\infty$ в рекуррентном соотношении $x_n=\varphi(x_{n-1})$, можно перенести знак предельного перехода через знак функции

[10] Уравнение $(x-1)^2=0$ имеет двукратный корень $x=1$, но к нему невозможно подступиться методом дихотомии, т. к. по обе стороны от точки $x=1$ знак функции $f(x)=(x-1)^2$ одинаков.

[11] Итерация (лат. iteratio) — повторение, повторное действие.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right).$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n-1} = \bar{x}$ является корнем уравнения $x = \varphi(x)$. Условие и скорость сходимости итерационного процесса определяются в соответствии со следующей теоремой.

Теорема. Пусть корень $\bar{x}$ уравнения $x = \varphi(x)$, а также последовательные приближения к нему x_0, $x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), \ldots, x_n = \varphi(x_{n-1})$, принадлежат отрезку изоляции $[a, b]$, на котором

$$|\varphi'(x)| \le q < 1 \tag{30}$$

(число q будем называть коэффициентом сжатия[12]).

Следовательно:

1) отображение $\varphi(x)$ является сжимающим, и итерационный процесс $x_n = \varphi(x_{n-1})$ сходится к корню $\bar{x}$ уравнения $x = \varphi(x)$;

2) критерий достижения требуемой точности ε заключается в том, что как только для абсолютной погрешности Δ n-го приближения к корню выполнится условие

$$\Delta = |\bar{x} - x_n| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon, \tag{31}$$

счет можно оборвать.

Метод итераций сходится при любом выборе начального приближения x_0, лишь бы оно попадало в отрезок $[a, b]$, где выполняется условие сходимости (30). Благодаря этому метод является самоисправляющимся, т. е. ошибка в вычислениях, не выводящая за пределы области сходимости $[a, b]$, не повлияет на конечный результат, т. к. ошибочное значение можно рассматривать как новое начальное значение x_0. Методы вычислений, обладающие свойством самоисправления, особенно надежны.

Из формулы (30) следует, что в качестве значения коэффициента сжатия q можно взять

$$q = \max_{[a,b]} |\varphi'(x)|. \tag{32}$$

[12] Название не является общепринятым; часто это число называют коэффициентом Липшица (1832–1903).

Из оценки погрешности (31) следует, что скорость сходимости итерационного процесса к корню $\bar{x}$ особенно велика при коэффициенте сжатия $q \approx 0$. Когда q приближается к единице (со стороны меньших значений), сходимость замедляется. При $q \ge 1$ последовательность приближений x_0, $x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), \ldots, x_n = \varphi(x_{n-1})$, расходится, и найти корень уравнения $x = \varphi(x)$ с его помощью невозможно. Итак, наиболее благоприятен для вычислений случай $q \approx 0$, поскольку при нем небольшое количество итераций обеспечивает вычисление корня с высокой точностью.

Рассмотрим, как привести уравнение $f(x) = 0$ к виду $x = \varphi(x)$, удобному для итераций, и как обеспечить благоприятное значение q:

1) прибавляя x к обеим частям уравнения $f(x) = 0$, получим $x = f(x) + x$. Обозначая правую часть как новую функцию $f(x) + x = \varphi(x)$, приводим уравнение к нужному виду $x = \varphi(x)$;

2) если окажется, что на отрезке изоляции корня $[a, b]$ для введенной функции значение $\max\limits_{[a,b]}|\varphi'(x)|$ недостаточно мало́, применим более общий прием введения параметра λ: сначала уравнение $f(x) = 0$ преобразуем к равносильному (при $\lambda \ne 0$) уравнению $\lambda f(x) = 0$, а затем прибавим x в обеих частях $x = \lambda f(x) + x$ и, вводя новую функцию $\varphi(x) = \lambda f(x) + x$, получим удобное для итераций уравнение $x = \varphi(x)$. Поскольку согласно (30)–(32) высокая скорость сходимости обеспечивается при $q = \max\limits_{[a,b]}|\varphi'(x)| \approx 0$, выберем на отрезке изоляции $[a, b]$ некоторую точку (например, середину отрезка) x_0 и потребуем, чтобы в ней $\varphi'(x_0) = \lambda f'(x_0) + 1 = 0$. Отсюда найдем значение параметра $\lambda = -1/f'(x_0)$, обеспечивающее благоприятное q (его значение можно найти графически, построив график функции $y = |\varphi'(x)|$ на отрезке $[a, b]$ изоляции корня);

3) часто приводит к цели простой прием — по-другому выразить x из уравнения $x = \varphi(x)$, если первый вариант оказался неудачным. Смысл этой рекомендации станет ясен из нижеследующего примера.

Пример. Методом итераций найти корни уравнения

$$5x - 6\ln x - 7 = 0 \tag{33}$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решение. При помощи графического метода найдем количество корней и отрезки их изоляции. Если график строится вручную, то его построение для функции $f(x) = 5x - 6\ \ln x - 7$ затруднительно. Проще привести уравнение к виду $\ln x = \dfrac{5x-7}{6}$ и найти абсциссы точек пересечения графиков функций $f_1(x) = \ln x$ и $f_2(x) = \dfrac{5x-7}{6}$ (рис. 11). При работе, например, в пакете MathCad разбиение функции на $f_1(x)$ и $f_2(x)$ излишне!

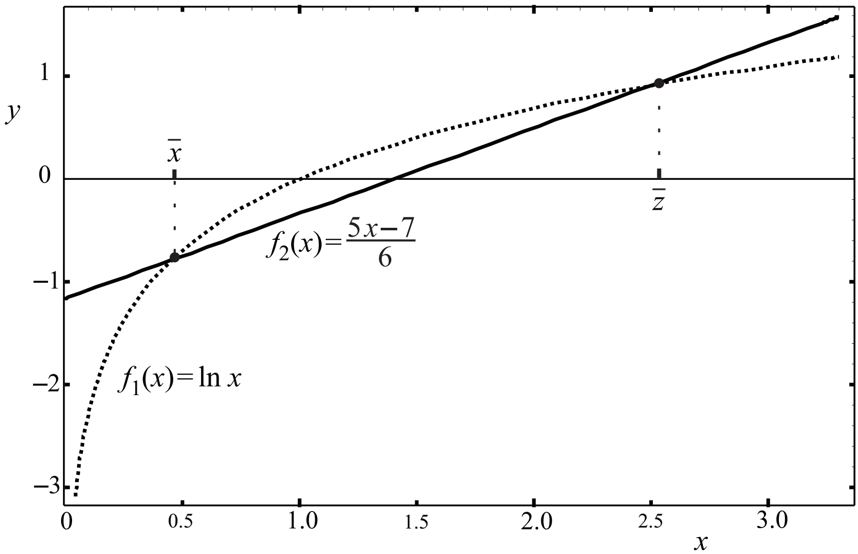

Рис. 11. Графическое отделение корней[13]

Приведем уравнение (33) к виду, удобному для итераций. Можно, например, выразить x из первого слагаемого

$$x = \frac{6\ \ln x + 7}{5},$$

тогда в итерационном процессе будет использоваться функция $\varphi(x) = \dfrac{6\ \ln x + 7}{5}$, и нужно проверить, будет ли такой процесс сходящимся. Для этого вычислим производную $\varphi'(x) = \dfrac{6}{5x}$ и найдем коэф-

[13] Уравнение $5x - 6\ \ln x - 7 = 0$ имеет два корня: $\bar{z} \in [0,1;\ 1]$ и $\bar{z} \in [2;\ 3]$. Первый из отрезков изоляции не должен начинаться в нуле, т. к. в этой точке функция $\ln x$ терпит разрыв.

фициент сжатия $q = \max|\varphi'(x)|$ на каждом отрезке изоляции корня. На правом отрезке изоляции $[2;3]$

$$q_1 = \max_{[2;3]}|\varphi'(x)| = \max_{[2;3]}\frac{6}{5x} = \left.\frac{6}{5x}\right|_{x=2} = 0.6 < 1.$$

Итерационный процесс будет сходящимся, и его можно использовать для нахождения корня $\bar{z}$.

На левом отрезке $[0.1;1]$ изоляции корня

$$\max_{[0,1;1]}|\varphi'(x)| = \max_{[0,1;1]}\frac{6}{5x} = \left.\frac{6}{5x}\right|_{x=0,1} = 12 > 1,$$

и функция $\varphi(x) = \dfrac{6\ln x + 7}{5}$ непригодна для вычисления корня $\bar{x}$, т. к. итерационный процесс будет расходящимся. Поэтому для отрезка $[0.1;1]$ по-другому выразим *x* из уравнения (33), а именно: выразим *x*, который был аргументом логарифма $x = e^{\frac{5x-7}{6}}$, и введем функцию

$$\psi(x) = \exp\left(\frac{5x-7}{6}\right),$$

которую надо проверить на пригодность к использованию в итерационном процессе. Поскольку

$$q_2 = \max_{[0,1;1]}|\psi'(x)| = \max_{[0,1;1]}\frac{5}{6}\exp\left(\frac{5x-7}{6}\right) = \left.\frac{5}{6}\exp\left(\frac{5x-7}{6}\right)\right|_{x=1} =$$

$$= \frac{5}{6}e^{-1/3} = \frac{5}{6\sqrt[3]{e}} \approx 0.597 \approx 0.6 < 1,$$

функция $\psi(x)$ обеспечит сходимость итерационного процесса (случайно коэффициент сжатия совпал с q_1).

Резюмируем:

а) для нахождения корня $\bar{x} \in [0.1;1]$ строим итерационный процесс

$$x_{n+1} = \exp\left(\frac{5x_n - 7}{6}\right),\ n = 0, 1, 2, \ldots;$$

начальное приближение $x_0 = 0.5$; коэффициент сжатия $q_2 = 0.6$;

критерий достижения требуемой точности — как только для абсолютной погрешности Δ выполнится условие

$$\Delta = \left|\bar{x} - x_n\right| \le \frac{q_2}{1-q_2}\left|x_n - x_{n-1}\right| < \varepsilon = 0.001,$$

счет можно оборвать (ответ записать с тремя верными десятичными знаками, гарантируемыми достигнутой точностью);

б) для корня $\bar{z} \in [2; 3]$ строим итерационный процесс

$$z_{n+1} = \frac{6\ln z_n + 7}{5}, \; n = 0, 1, 2, \ldots;$$

начальное приближение $z_0 = 2.5$; коэффициент сжатия $q_1 = 0.6$; критерий достижения требуемой точности — как только выполнится условие

$$\Delta = \left|\bar{z} - z_n\right| \le \frac{q_1}{1-q_1}\left|z_n - z_{n-1}\right| < \varepsilon = 0.001,$$

счет можно оборвать.

В качестве начального приближения к корню традиционно (но не обязательно) берут середину отрезка его изоляции.

Результаты вычислений сведем в таблицы (табл. 3).

Таблица 3

Результаты вычислений

Номер итерации	Приближение к корню	Следующее приближение	Оценка погрешности
n	x_n	$\psi(x_n) = \exp\left(\frac{5x_n - 7}{6}\right)$	$\frac{q_2}{1-q_2}\left\|x_n - x_{n-1}\right\|$
0	0.5	0.4724	–
1	0.4724	0.4616	0.016
2	0.4616	0.4575	$6.177\cdot10^{-3}$
3	0.4575	0.4559	$2.351\cdot10^{-3}$
4	0.4559	0.4553	$8.926\cdot10^{-4} < \varepsilon$
n	z_n	$\varphi(z_n) = \frac{6\ln z_n + 7}{5}$	$\frac{q_1}{1-q_1}\left\|z_n - z_{n-1}\right\|$
0	2.5	2.4995	–
1	2.4995	2.4993	$6.767\cdot10^{-4} < \varepsilon$

На нулевой итерации оценить погрешность невозможно (поставлен прочерк), поскольку никакого значения, предшествующего нулевому приближению, не существует.

Итак, $\bar{x} \approx x_4 = 0.455$; $\bar{z} \approx z_1 = 2.499$.

Свойства метода итераций:

а) дифференцируемость функций, участвующих в расчетах;

б) самоисправляемость вычислительного процесса;

в) скорость сходимости зависит от величины коэффициента сжатия q. Благоприятных (близких к нулю) значений q всегда можно достичь введением параметра λ для ускорения сходимости;

г) когда уравнение имеет несколько корней, как правило, для нахождения каждого из них приходится индивидуально строить итерационный процесс, поскольку сходимость одного процесса на разных отрезках изоляции обычно не достигается.

Метод Ньютона

Пусть в уравнении $f(x)=0$ функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x) \neq 0$; x_n есть некоторое приближение к корню $\bar{x}$ рассматриваемого уравнения. В окрестности точки x_n разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x - x_n)^2 +$$

$$+\frac{f'''(x_n)}{3!}(x - x_n)^3 + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_n)}{k!}(x - x_n)^k \ldots$$

и ограничимся линейным по x слагаемым включительно

$$0 = f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n). \tag{34}$$

Отсюда

$$x \approx x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

и согласно идее Ньютона левую часть этого выражения будем рассматривать как следующее, $(n+1)$-е, приближение некоторого итерационного процесса

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{35}$$

Формула (35) представляет метод Ньютона численного решения уравнений. Другое название — метод линеаризации, поскольку функция $f(x)$ приближенно заменена линейной (34).

Выясним геометрический смысл итерационного процесса (35). В точке с абсциссой x_0 проведем касательную к графику функции $y = f(x)$ (рис. 12); уравнение касательной

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

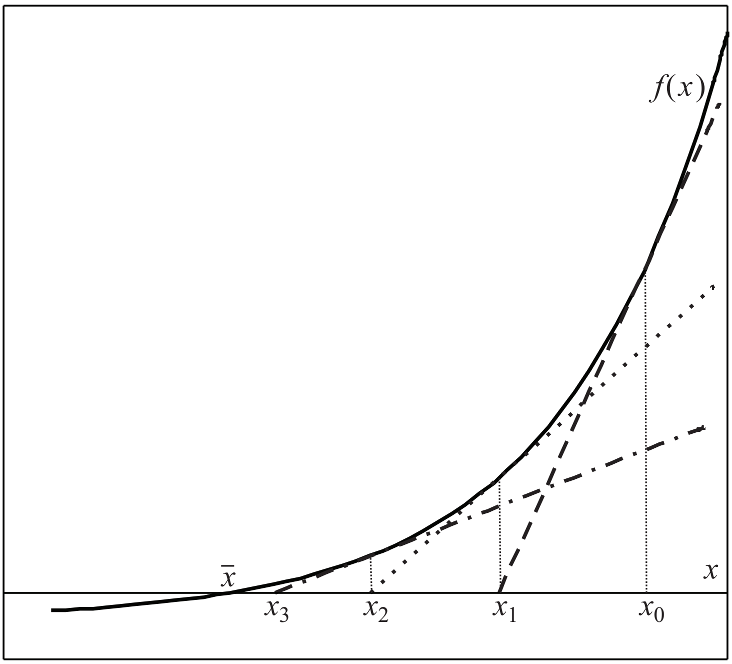

Рис. 12. Геометрическая иллюстрация метода Ньютона

Найдем точку пересечения данной прямой с осью абсцисс (в этой точке $y = 0$)

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Согласно формуле (35) полученное значение — это следующее приближение x_1. В точке с абсциссой x_1 проведем еще одну касательную к графику $f(x)$; уравнение касательной

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1).$$

Точка пересечения данной прямой с осью абсцисс

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Это будет второе приближение x_2, и т. д.

Итак, на каждой итерации график функции $f(x)$ заменяется его касательной. Поэтому метод Ньютона называют еще методом касательных.

Метод Ньютона можно рассматривать как частный случай рассмотренного выше метода итераций. В самом деле, от уравнения $f(x) = 0$ можно перейти к равносильному

$$-\frac{f(x)}{f'(x)} = 0, \text{ или } x - \frac{f(x)}{f'(x)} = 0 + x.$$

Вводя функцию

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

приходим к виду $x = \varphi(x)$, удобному для итераций. Скорость сходимости итерационного процесса, как известно, определяется значением $|\varphi'(x)|$ на отрезке изоляции корня. В нашем случае

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{\left[f'(x)\right]^2 - f(x) f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}.$$

Если подставить сюда корень $x = \bar{x}$, то, с учетом равенства $f(\bar{x}) = 0$ (в уравнение подставлен его собственный корень!), получаем

$$\varphi'(\bar{x}) = 0.$$

Таким образом, в точках, очень близких к корню $\bar{x}$ уравнения $f(x) = 0$, скорость сходимости итерационного процесса бесконечно велика! В результате можно сделать вывод о том, что при выборе начального приближения x_0 достаточно близко к $\bar{x}$ метод Ньютона (35) должен обеспечивать быструю сходимость последовательности приближений $x_0, x_1, \ldots, x_k,$ к искомому корню $\bar{x}$.

К сожалению, этот вывод несколько поспешен. Рассмотрим уравнение $\operatorname{arctg} x = 0$ (рис. 13). Начальное приближение x_0 близко к корню $\bar{x} = 0$, но каждое следующее приближение все дальше от него.

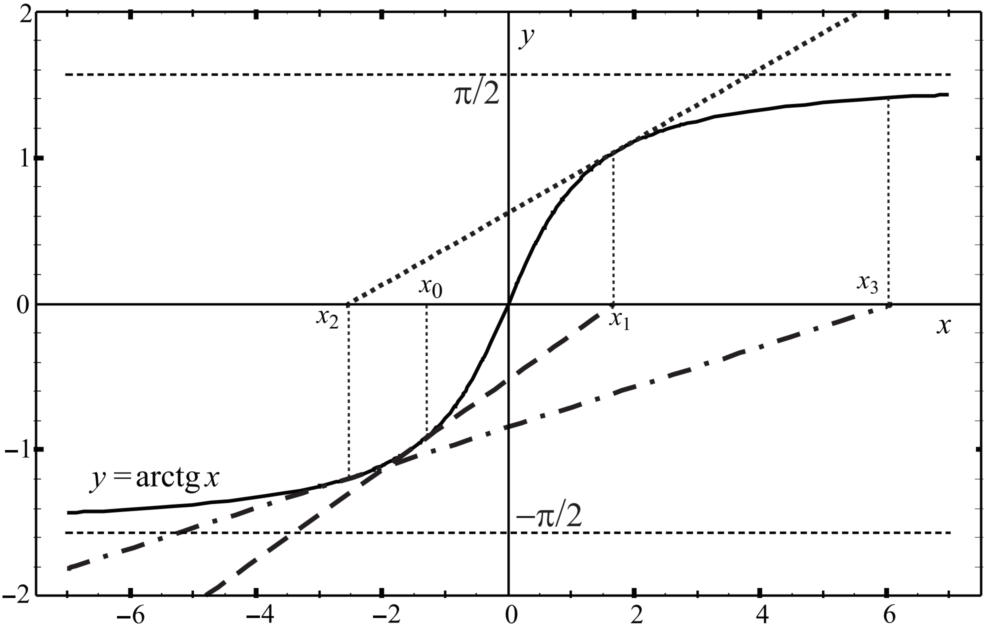

Рис. 13. Пример расходящейся последовательности приближений $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ в методе Ньютона

Оказывается, что при сохранении знака производных $f'(x)$, $f''(x)$ на отрезке $[a, b]$ изоляции корня уравнения $f(x) = 0$ метод Ньютона сходится, если в качестве начального приближения x_0 взять любую точку отрезка $[a, b]$.

Если же $f''(x)$ меняет знак на отрезке изоляции корня, то сходимость итерационного процесса не гарантируется. В рассмотренном примере ситуация именно такова: при переходе через $x = 0$ вторая производная

$$(\operatorname{arctg} x)'' = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = -\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

меняет знак (направление выпуклости графика арктангенса меняется на противоположное; $x = 0$ — точка перегиба).

Пример. Решить методом Ньютона уравнение

$$5x - 6\ln x - 7 = 0.$$

Решение. Выше (см. рис. 11) корни этого уравнения уже изолированы $\bar{x} \in [0.1; 1]$ и $\bar{z} \in [2; 3]$. Для функции

$$f(x) = 5x - 6\ln x - 7$$

первая и вторая производные $f'(x) = 5 - 6/x$, $f''(x) = 6/x^2$ сохраняют знак на обоих отрезках изоляции корней, что является гарантией сходимости итерационных процессов.

Для левого корня $\bar{x} \in [0.1; 1]$ выбираем начальное приближение, например $x_0 = 0.5$ (в силу самоисправляемости метода это может быть любая точка отрезка изоляции); следующие приближения по Ньютону

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{5x_n - 6\ln x_n - 7}{5 - \dfrac{6}{x_n}} = \frac{6x_n \ln x_n + x_n}{5x_n - 6}, \quad n = \mathbf{0}, 1, 2, \ldots$$

Для правого корня $\bar{z} \in [2; 3]$ при начальном приближении, например $z_0 = 3.5$, итерационный процесс строится точно так же, как для левого,

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} = \frac{6z_n \ln z_n + z_n}{5z_n - 6}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Когда нужная точность будет достигнута? В соответствии с известной формулой конечных приращений Лагранжа для дифференцируемой функции $f(x)$

$$f(\alpha) - f(\beta) = f'(\xi) \cdot (\alpha - \beta),$$

где (заранее неизвестная) промежуточная точка $\xi \in [a, b]$. Пусть здесь α равняется x_n, β равняется $\bar{x}$ — искомому значению корня, тогда $f(\beta) = 0$ и

$$f(x_n) = f'(\xi) \cdot (x_n - \bar{x}).$$

Отсюда получаем критерий обрыва счета в методе Ньютона: как только абсолютная погрешность n-го приближения

$$\Delta = |x_n - \bar{x}| = \left| \frac{f(x_n)}{f'(\xi)} \right| \le \frac{|f(x_n)|}{m},$$

где $m = \min\limits_{[a,b]} |f'(x)|$, станет меньше требуемой точности ε

$$\frac{|f(x_n)|}{m} < \varepsilon, \tag{36}$$

точность достигнута, и вычисления можно прекратить, записав ответ $\bar{x} \approx x_n$.

Свойства метода Ньютона таковы:

а) функции, участвующие в расчетах, должны быть дифференцируемыми;

б) вычислительный процесс (35) самоисправляющийся;

в) нахождение всех корней, сколько бы их не было, обслуживается одним и тем же вычислительным процессом (35) — в противоположность методу итераций, в котором, как правило, для каждого корня приходится индивидуально строить итерационный процесс;

г) скорость сходимости итерационного процесса высока;

д) на каждом шаге вычислений требуется вычислять производную $f'(x_n)$, что может иногда представлять проблему при сложно заданной функции.

На частичное устранение этого единственного возможного недостатка метода Ньютона направлено введение двух методов, являющихся его следствиями, — метода секущих и метода хорд.

Метод секущих

Поскольку математически производная вводится как предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x},$$

то, убирая предельный переход, получим приближенное значение производной

$$f'(x) \approx \frac{f(z) - f(x)}{z - x}. \tag{37}$$

В соответствии с этим в методе секущих производная приближенно вычисляется по формуле

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}. \tag{38}$$

Подставляя в формулу (35) это выражение для производной, приходим к следующему итерационному процессу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\, f(x_n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{39}$$

для которого надо указать два начальных приближения x_0 и x_1 (в отличие от метода Ньютона, в котором требовалось указать только x_0). С геометрической точки зрения в методе секущих (39) касательная заменяется секущей, проходящей через точки кривой $y = f(x)$ с абсциссами x_n и x_{n-1} (рис. 14).

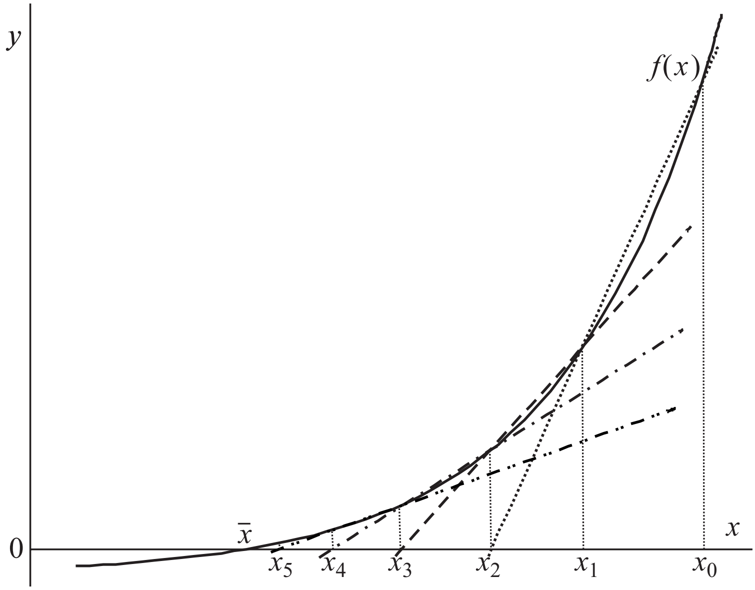

Рис. 14. Геометрическая иллюстрация метода секущих

Свойства метода секущих заключаются в следующем:

а) поскольку метод секущих является модификацией метода Ньютона (метода касательных), он наследует все свойства последнего;

б) скорость сходимости итерационного процесса ниже, чем в методе касательных (вследствие огрубления, заложенного приближением (38), но остается высокой;

в) производная $f'(x_n)$ изгоняется из вычислительного процесса, но лишь частично, поскольку для контроля точности (36) она попрежнему нужна!

Метод хорд

Применим в формуле (35) еще более грубое приближение для производной

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

(в самом деле, точки x_n и x_0 дальше друг от друга, чем x_n и x_{n-1} в выражении (38)). Подставляя в формулу (35) это выражение для производной, получим итерационный процесс метода хорд:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} f(x_n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

для которого, как и в методе секущих, надо указать два начальных приближения x_0 и x_1. Геометрически в методе хорд касательная заменяется хордой, проходящей через точки кривой $y = f(x)$ с абсциссами x_n и x_0, (рис. 15).

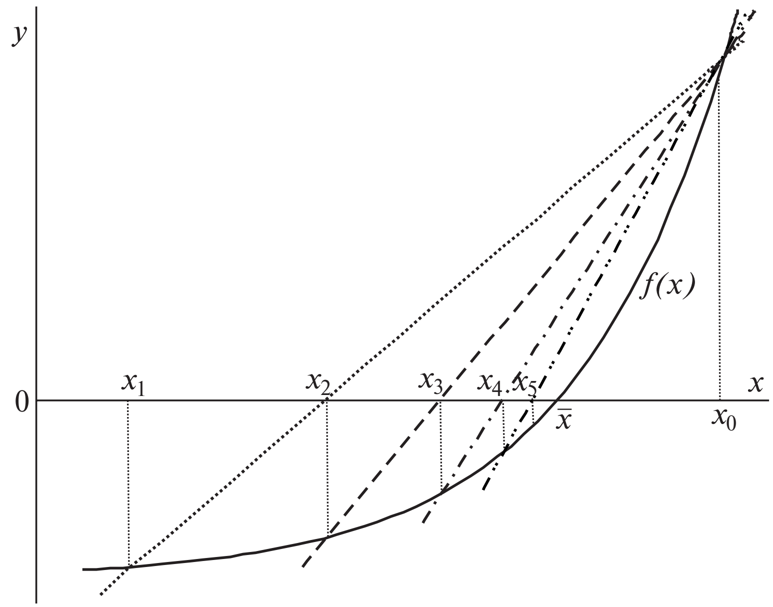

Рис. 15. Геометрическая иллюстрация метода хорд

Метод хорд имеет те же свойства, что и метод секущих, но скорость сходимости при прочих равных условиях становится еще несколько ниже, чем у последнего (оставаясь высокой).