Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Линейные системы

Пусть задана система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\left.\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \boldsymbol{a}_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}\right\} \tag{40}$$

Вводя матрицу коэффициентов при неизвестных (матрицу системы)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

столбец правых частей (неоднородностей) и столбец неизвестных[14]

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

можно записать систему (40) в матричном виде

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

[14] Эти столбцы формально можно считать в е к т о р а м и.

Методы решения линейных систем можно разбить на две группы: точные (прямые) и приближенные (итерационные).

К точным методам относятся такие, которые в предположении, что вычисления ведутся точно (без округлений), за конечное, заранее оцениваемое количество шагов вычислений приводят к точным значениям неизвестных x_i. Фактически, из-за почти неизбежных округлений при вычислениях, результаты, получаемые точными методами, будут содержать погрешности. Точными являются, например, известные методы Крамера (1704–1752) и Гаусса (1777–1855).

К приближенным относятся такие методы, которые даже в предположении отсутствия погрешности округлений доставляют решение системы лишь с заданной точностью. Точное решение системы достигается асимптотически как результат бесконечного процесса. Примерами приближенных методов являются метод простой итерации [15] и его модификация — метод Зейделя (1821–1896).

Прежде чем переходить к рассмотрению приближенных методов, напомним некоторые особенности методов Крамера и Гаусса.

Правило Крамера применимо при условиях:

а) количество неизвестных n в системе равно числу уравнений m, тогда матрица системы A квадратная, и ей можно сопоставить определитель $\det A$;

б) матрица A невырожденная, т.е. $\det A \neq 0$.

При выполнении этих (довольно стеснительных!) условий решение системы (40) можно найти по формулам Крамера

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \tag{41}$$

где A_i – матрица, получаемая из исходной матрицы A заменой ее i-го столбца столбцом правых частей b_i.

Итак, для решения системы из n уравнений с n неизвестными по правилу Крамера нужно вычислить $(n+1)$ определитель n-го порядка, что очень трудоемко (при самой экономичной организации вычислений потребуется выполнить порядка $\frac{2}{3}n^4$ арифметических операций). Таким образом, правило Крамера удобно

[15] Смысл слова *простая* выяснится ниже, при обсуждении метода Зейделя как модификации данного метода.

в теоретических приложениях (доказывание теорем, вывод формул и т. п.) благодаря компактности формулы (41), но крайне неудобно для практического решения систем.

Почти во всех отношениях более предпочтительным является метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных). Он не требует невырожденности матрицы A; более того, она может даже не быть квадратной. Если же решается система из n уравнений с n неизвестными, то для реализации метода Гаусса потребуется примерно

$$\frac{2n(n+1)(n+2)}{3}+n(n-1),$$

или порядка $\frac{2}{3}n^3$ арифметических операций (сравните с оценкой для правила Крамера!).

Метод простой итерации

Пусть система из n уравнений с n неизвестными

$$\left.\begin{array}{lcl} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \boldsymbol{a}_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right\} \tag{42}$$

записана в векторно-матричной форме

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \tag{43}$$

и приведена к виду

$$\boldsymbol{x}=C\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}\ , \tag{44}$$

удобному для итерирования ($C_{n\times n}$ — некоторая матрица; $\boldsymbol{f}$ – вектор-столбец). Удобство состоит в том, что, задав начальное приближение

$$\boldsymbol{x}^{(0)}=\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$$

и подставляя его в правую часть уравнения (44), слева получим следующее приближение:

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = C\boldsymbol{x}^{(0)} + \boldsymbol{f}$$

и

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = C\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{f}, \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{45}$$

В развернутой записи —

$$\left.\begin{array}{lcl} x_1^{(k+1)} & = & c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + \ldots + c_{1n}x_n^{(k)} + f_1, \\ . \quad . & . & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_n^{(k+1)} & = & c_{n1}x_1^{(k)} + c_{n2}x_2^{(k)} + \ldots + c_{nn}x_n^{(k)} + f_n. \end{array}\right\} \tag{46}$$

Выполняя итерации, получим последовательность векторов $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(k)}, \ldots$ Сходится ли эта последовательность, и если да — сходится ли она к искомому решению системы (42)?

Условия сходимости итерационного процесса

Прежде чем сформулировать условия сходимости, напомним некоторые понятия функционального анализа.

Обобщением понятия длины m-мерного вектора $\boldsymbol{x}$ является норма вектора $\|\boldsymbol{x}\|$, из множества способов введения которой в численных методах наиболее употребительными являются следующие три нормы:

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{m}|x_i|, \quad \|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}|x_i|^2}, \quad \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le m}|x_i|. \tag{47}$$

Первые две являются частными случаями (при $p = 1$ и $p = 2$) общей нормы Минковского (1864–1909)

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m}|x_i|^p\right)^{1/p}, \ p \ge 1,$$

а последняя получается из нее предельным переходом при $p \to \infty$. Заметим, что норма $\|\boldsymbol{x}\|_2$ является естественным обобщением длины вектора, вычисляемой по теореме Пифагора в 2- и 3-мерном геометрических пространствах, на случай m-мерного пространства. Норма $\|\boldsymbol{x}\|_2$ называется евклидовой.

Число

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \tag{48}$$

называется нормой матрицы A. Поскольку умножение матрицы A на вектор $\boldsymbol{x}$ можно рассматривать как преобразование, переводящее вектор $\boldsymbol{x}$ в новый вектор $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$, то дробь $\|A\boldsymbol{x}\|/\|\boldsymbol{x}\|$ в формуле (48) является не чем иным, как коэффициентом сжатия q, с которым мы уже рассматривали в предыдущей главе. Каждой из векторных норм (47) соответствует своя норма матрицы:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le m} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 \le \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2}, \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|. \tag{49}$$

Для вычисления нормы $\|A\|_1$ надо найти сумму модулей элементов каждого столбца матрицы A, а затем выбрать максимальную из этих сумм. Для вычисления нормы $\|A\|_\infty$ то же надо сделать не со столбцами, а со строками матрицы A. Заметим, что для нормы $\|A\|_2$ дана лишь оценка сверху, поскольку точное значение этой нормы вычисляется трудоемко.

Пример. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.4 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & -0.1 & -0.3 \end{pmatrix}$$

вычислить $\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$ и оценить $\|A\|_2$.

Решение. В соответствии с формулами (49)

$$\|A\|_1 = \max\{0.1 + 0.2 + 0;\ 0.4 + 0.3 + 0.1;\ 0 + 0.1 + 0.3\} = 0.8;$$

$$\|A\|_\infty = \max\{0.1 + 0.4 + 0;\ 0.2 + 0.3 + 0.1;\ 0 + 0.1 + 0.3\} = 0.6;$$

$$\|A\|_2 \le \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}|^2} =$$

$$= \sqrt{(0.1)^2 + (-0.4)^2 + 0^2 + (0.2)^2 + (0.3)^2 + (0.1)^2 + \mathbf{0}^2 + (-0.1)^2 + (-0.3)^2} =$$

$$= \sqrt{0.41} \approx 0.64.$$

Теперь можно сформулировать теорему, устанавливающую условие сходимости метода простой итерации и критерий обрыва итерационного процесса (45).

Теорема о сходимости итерационного процесса. Пусть выполнено условие

$$\|C\| < 1. \tag{50}$$

Тогда:

1) решение $\bar{\boldsymbol{x}}$ системы (42) существует и единственно;

2) при произвольном векторе начального приближения $\boldsymbol{x}^{(0)}$ метод простой итерации сходится к точному решению системы $\bar{\boldsymbol{x}}$

$$\lim_{k \to \infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \bar{\boldsymbol{x}},$$

и справедлива следующая оценка абсолютной погрешности k-го приближения, обобщающая формулу (31),

$$\Delta = \left\| \boldsymbol{x}^{(k)} - \bar{\boldsymbol{x}} \right\| \le \frac{q}{1-q} \left\| \boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)} \right\|, \tag{51}$$

где в качестве коэффициента сжатия $q = \|C\|$ можно использовать любую норму матрицы (49), удовлетворяющую условию (50).

Несколько **замечаний** к теореме.

1. Из сходимости итераций по одной из норм следует и сходимость по другой норме, т. е., например, если $\left\| \boldsymbol{x}^{(k)} - \bar{\boldsymbol{x}} \right\|_1 \to 0$ при $k \to \infty$, то и $\left\| \boldsymbol{x}^{(k)} - \bar{\boldsymbol{x}} \right\|_2 \to 0$ при $k \to \infty$, и наоборот.

2. Приведем критерий достижения требуемой точности ε (критерий обрыва счета): вычисления можно прервать, как только абсолютная погрешность Δ, оцениваемая по формуле (51), станет меньше ε. Практически (в соответствии с нормой $\|\boldsymbol{x}\|_\infty$ в формуле (47) следует проверить выполнение условия для каждой компоненты вектора k-го приближения

$$\frac{q}{1-q} \left\| \boldsymbol{x}_i^{(k)} - \boldsymbol{x}_i^{(k-1)} \right\| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{52}$$

3. Как и для любого сходящегося итерационного процесса, здесь выполняется условие с а м о и с п р а в л е н и я: вектор начального приближения $\boldsymbol{x}^{(0)}$ произволен, и при любом его выборе итерационный процесс сойдется к одному и тому же точному решению системы $\bar{\boldsymbol{x}}$. Обычно в качестве $\boldsymbol{x}^{(0)}$ берут вектор неоднородностей $\boldsymbol{f}$ в системе (44). Чем ближе начальное приближение к $\bar{\boldsymbol{x}}$, тем, при прочих равных условиях, потребуется меньше итераций для выполнения условий (53). Поэтому если каким-то образом стало известным грубо прикидочное решение системы (44), его выгодно использовать в качестве $\boldsymbol{x}^{(0)}$.

4. Простейший способ преобразования системы (43) к виду (44), удобному для итераций, состоит в том, чтобы в каждом уравнении (42) выразить соответствующую неизвестную через все остальные

$$\left.\begin{array}{lcl}
x_1 & = & \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n\right),\\
x_2 & = & \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2\boldsymbol{n}}x_n\right),\\
\multicolumn{3}{c}{\dotfill}\\
x_n & = & \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{n\ n-1}x_{n-1}\right).
\end{array}\right\}$$

Этот способ годится, если диагональные элементы матрицы A отличны от нуля:

$$a_{ii} \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Реализацию метода простой итерации рассмотрим на примере.

Пример. Решить методом простой итерации систему

$$\left.\begin{array}{lcl}
20.9x_1 + 1.2x_2 + 2.1x_3 + 0.9x_4 & = & 21.70,\\
1.2x_1 + 21.2x_2 + 1.5x_3 + 2.5x_4 & = & 27.46,\\
2.1x_1 + 1.5x_2 + 19.8x_3 + 1.3x_4 & = & 28.76,\\
0.9x_1 + 2.5x_2 + 1.3x_3 + 32.1\boldsymbol{x}_4 & = & 49.72
\end{array}\right\} \qquad (53)$$

с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решение. Приведем систему к виду, удобному для итераций:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{20.9}(21.70 - 1.2x_2 - 2.1x_3 - 0.9x_4), \\ x_2 &= \frac{1}{21.2}(27.46 - 1.2x_1 - 1.5x_3 - 2.5x_4), \\ x_3 &= \frac{1}{19.8}(28.76 - 2.1x_1 - 1.5x_2 - 1.3x_4), \\ x_4 &= \frac{1}{32.1}(49.72 - 0.9x_1 - 2.5x_2 - 1.3x_3). \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Матрица C (см. формулу (44), соответствующая системе (54) удовлетворяет ограничению на норму (50), если последнюю вычислять, например, как $\|C\|_\infty$ (49) — максимум построчной суммы модулей. В самом деле, вычислим эту сумму для каждой строки:

$$\sum_{j=1}^{4}|c_{1j}| = |c_{11}| + |c_{12}| + |c_{13}| + |c_{14}| = \frac{1.2 + 2.1 + 0.9}{20.9} \approx 0.20,$$

$$\sum_{j=1}^{4}|c_{2j}| \approx 0.24, \quad \sum_{j=1}^{4}|c_{3j}| \approx 0.25, \quad \sum_{j=1}^{4}|c_{4j}| \approx 0.15.$$

$$\|C\|_\infty = \max_{1\le i\le 4}\sum_{j=1}^{4}|c_{ij}| = \max\{0.20;\ 0.24;\ 0.25;\ 0.15\} = 0.25.$$

Итак, коэффициент сжатия $q = \|C\|_\infty = 0.25 < 1$. При таком значении q скорость сходимости итерационного процесса будет высокой, поскольку $q/(1-q) = 1/3$.

В качестве вектора начального приближения возьмем столбец неоднородностей в системе (54):

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 21.70/20.9 \\ 27.46/21.2 \\ 28.76/19.8 \\ 49.72/32.1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.04 \\ 1.30 \\ 1.45 \\ 1.55 \end{pmatrix}.$$

Итерации будем продолжать до тех пор, пока оценка погрешности

$$\frac{q}{1-q}\left\|\boldsymbol{x}_i^{(k)} - \boldsymbol{x}_i^{(k-1)}\right\| = \tfrac{1}{3}\left\|\boldsymbol{x}_i^{(k)} - \boldsymbol{x}_i^{(k-1)}\right\|$$

не станет меньше $\varepsilon = 10^{-3}$ для всех компонент вектора.

Первая итерация (ср. с системой (54):

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{20.9}\left(21.70 - 1.2x_2^{(0)} - 2.1x_3^{(0)} - 0.9x_4^{(0)}\right) =$$

$$= \frac{1}{20.9}\cdot\left(21.70 - 1.2\cdot 1.30 - 2.1\cdot 1.45 - 0.9\cdot 1.55\right) = 0.75,$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{21.2}\left(27.46 - 1.2x_1^{(0)} - 1.5x_3^{(0)} - 2.5x_4^{(0)}\right) =$$

$$= \frac{1}{21.2}\cdot\left(27.46 - 1.2\cdot 1.04 - 1.5\cdot 1.45 - 2.5\cdot 1.55\right) = 0.95,$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{19.8}\left(28.76 - 2.1x_1^{(0)} - 1.5x_2^{(0)} - 1.3x_4^{(0)}\right) =$$

$$= \frac{1}{19.8}\cdot\left(28.76 - 2.1\cdot 1.04 - 1.5\cdot 1.30 - 1.3\cdot 1.55\right) = 1.14,$$

$$x_4^{(1)} = \frac{1}{32.1}\left(49.72 - 0.9x_1^{(0)} - 2.5x_2^{(0)} - 1.3x_3^{(0)}\right) =$$

$$= \frac{1}{32.1}\cdot\left(49.72 - 0.9\cdot 1.04 - 2.5\cdot 1.30 - 1.3\cdot 1.45\right) = 1.36,$$

итак, $\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.95 \\ 1.14 \\ 1.36 \end{pmatrix}$.

(Вычисления пока можно проводить с небольшим числом знаков после запятой, поскольку трудно ожидать высокой точности от вектора первого приближения.)

Вторая итерация $\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.8106 \\ 1.0118 \\ 1.2117 \\ 1.4077 \end{pmatrix}$.

Третья итерация $\boldsymbol{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.7978 \\ 0.9977 \\ 1.1975 \\ 1.3983 \end{pmatrix}$.

Четвертая итерация $\boldsymbol{x}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.8004 \\ 1.0005 \\ 1.2005 \\ 1.4003 \end{pmatrix}$.

Оценим точность системы (54), достигнутую после четвертой итерации:

$$\frac{1}{3}\left\|\boldsymbol{x}_1^{(4)} - \boldsymbol{x}_1^{(3)}\right\| = 0.0009, \quad \frac{1}{3}\left\|\boldsymbol{x}_2^{(4)} - \boldsymbol{x}_2^{(3)}\right\| = 0.0009,$$

$$\frac{1}{3}\left\|\boldsymbol{x}_3^{(4)} - \boldsymbol{x}_3^{(3)}\right\| = 0.001, \quad \frac{1}{3}\left\|\boldsymbol{x}_4^{(4)} - \boldsymbol{x}_4^{(3)}\right\| = 0.0007.$$

Поскольку максимальная из оценок (третья) не меньше $\varepsilon = 0.001$, продолжаем вычисления.

Пятая итерация $\boldsymbol{x}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0.7999 \\ 0.9999 \\ 1.1999 \\ 1.3999 \end{pmatrix}$.

Оценим точность после пятой итерации:

$$\frac{1}{3}\left\|\boldsymbol{x}_1^{(5)} - \boldsymbol{x}_1^{(4)}\right\| = 1,7 \cdot 10^{-4}, \quad \frac{1}{3}\left\|\boldsymbol{x}_2^{(5)} - \boldsymbol{x}_2^{(4)}\right\| = 2 \cdot 10^{-4},$$

$$\frac{1}{3}\left\|\boldsymbol{x}_3^{(5)} - \boldsymbol{x}_3^{(4)}\right\| = 2 \cdot 10^{-4}, \quad \frac{1}{3}\left\|\boldsymbol{x}_4^{(5)} - \boldsymbol{x}_4^{(4)}\right\| = 1,3 \cdot 10^{-4}.$$

Абсолютная погрешность

$$\Delta_5 = \left\|\boldsymbol{x}^{(5)} - \overline{\boldsymbol{x}}\right\|_\infty \le \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}}\left\|\boldsymbol{x}^{(5)} - \boldsymbol{x}^{(4)}\right\|_\infty = \tfrac{1}{3}\max_{1 \le i \le m}\left|x_i^{(5)} - x_i^{(4)}\right| = 2 \cdot 10^{-4} < 1\mathbf{0}^{-3} = \varepsilon.$$

Итак, абсолютная погрешность впервые стала меньше требуемой по условию задачи. Вычисления заканчиваем и записываем ответ, округляя $\boldsymbol{x}^{(5)}$ до трех верных десятичных знаков, которые гарантированы достигнутой точностью $\varepsilon = 0.001$:

$$\overline{\boldsymbol{x}} \approx \boldsymbol{x}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0.800 \\ 1.000 \\ 1.200 \\ 1.400 \end{pmatrix}.$$

Для информации отметим, что точное решение системы (53) есть $x_1 = 0.8$, $x_2 = 1.0$, $x_3 = 1.2$, $x_4 = 1.4$.

Замечания. 1. При практической реализации метода простой итерации, например в MathCad, рекомендуется ввести четыре функции нескольких переменных, соответствующие правым частям уравнений (54), и на каждой итерации вызывать эти функции по их именам, не переписывая в явном виде саму систему (54).

2. Понятно, что не всегда простейший переход от системы (53) к (54) обеспечивает выполнение условия сходимости (50) по какой-нибудь норме. Могут потребоваться дополнительные элементарные преобразования *строк* в исходной системе (53). Пример таких преобразований приведен ниже, при рассмотрении метода Зейделя.