

# Численное дифференцирование и интегрирование функций

---

## Численное дифференцирование

**Н**апомним сначала, как выполняется дифференцирование, т.е. нахождение производной, в математическом анализе, и выясним, почему такой подход не всегда возможен.

Пусть имеется функция, заданная аналитически, т.е. формулой  $y = f(x)$ . Начальное значение аргумента есть  $x_0$ ; при этом функция принимает значение  $y_0 = f(x_0)$ . Если аргумент испытает приращение  $\Delta x$  так, что новое значение аргумента  $x_1 = x_0 + \Delta x$ , то ему будет соответствовать новое значение функции  $y_1 = f(x_1)$ . Приращение функции в точке  $x_0$  есть  $\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0)$ . Отношение  $\Delta f(x_0)/\Delta x$  приращения функции к приращению аргумента показывает среднюю скорость изменения функции на отрезке от  $x_0$  до  $x_1$ . Если теперь устремить приращение аргумента к нулю, то предел отношения (если этот предел существует) по определению равен значению производной функции в точке  $x_0$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \quad (8)$$

К сожалению, эта формула применима не всегда. Если функция  $f(x)$  задана таблично своими значениями в узлах  $x_0, x_1, \dots$ , то приращение аргумента  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ , как бы мало оно ни было, всегда конечно, и его нельзя устремить к нулю.

|     |       |       |       |       |     |
|-----|-------|-------|-------|-------|-----|
| $x$ | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... |
| $y$ | $y_0$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | ... |

Например, индекс РТС, являющийся основным показателем фондового рынка России, рассчитывается каждые 15 с. Можно вычислить среднюю скорость изменения индекса на каждом временном интервале, но найти точное значение производной индекса РТС по времени невозможно.

Итак, к численному дифференцированию приходится прибегать в тех случаях, когда функция  $f(x)$ , которую нужно продифференцировать, задана таблично. Кроме того, даже если функция задана аналитически, но очень сложной формулой<sup>3</sup>, нахождение производной по определению (8) может оказаться проблематичным — вычислить значения  $f(x_i)$  затруднительно.

Идея численного дифференцирования несложна: вместо функции  $f(x)$  рассматривается некоторая «близкая» к ней функция<sup>4</sup>  $g(x)$ , определяемая достаточно простой формулой, и поскольку  $f(x) \approx g(x)$ , постольку их производные, вероятно, близки

$$f'(x) \approx g'(x);$$

это должно быть верно и для вторых производных

$$f''(x) \approx g''(x),$$

и т. д.

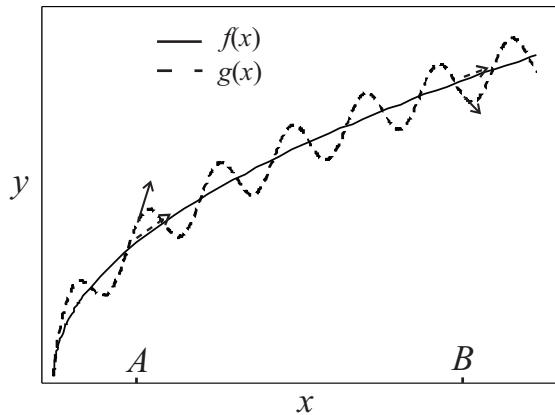
В действительности эта идея очень рискованна: близость функций отнюдь не предопределяет близость их производных. В качестве примера рассмотрим две функции:  $f(x)$  и  $g(x) = f(x) + \frac{1}{n} \sin n^2 x$ . Поскольку  $|f(x) - g(x)| = \left| \frac{1}{n} \sin n^2 x \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , разность функций при достаточно больших  $n$  сколь угодно мала, т. е. функции близки. Однако разность их производных  $|f'(x) - g'(x)| = |f'(x) - [f'(x) + n \cos n^2 x]| = |n \cos n^2 x|$  не мала, т. к.  $\max_{x \in (-\infty, \infty)} |n \cos n^2 x| = n$ , т. е. производные не близки.

Это можно показать проще, опираясь на геометрический смысл производной  $f'(x_0)$ : она равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$  (рис. 2).

Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  близки, т. к. ординаты точек двух графиков при одинаковых абсциссах мало отличаются. Но направления касательных, проведенных к графикам (см., например, точки  $A$  и  $B$ ), резко различны, т. е. производные  $f'(x)$  и  $g'(x)$  не близки.

<sup>3</sup> См. сноску 2.

<sup>4</sup> Как мы помним, говорят об аппроксимации  $f(x)$  с помощью  $g(x)$ .

Рис. 2. Сопоставление двух «близких» функций<sup>5</sup>

Итак, вообще говоря, «наивная» идея (2)–(3) неверна, но если в качестве аппроксимирующей функции  $g(x)$  используется интерполяционный полином Лагранжа, построенный по значениям  $f(x)$  во многих узлах с небольшим расстоянием между ними, то приближенно вычислить  $f'(x)$ , заменяя ее на  $g'(x)$ , все же возможно, и возникающая при этом погрешность численного дифференцирования может быть оценена.

Пусть функция  $f(x)$  задана таблично своими значениями в равноотстоящих узлах  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ . По этим значениям построим полином Лагранжа  $L_n(x)$ , и тогда  $f'(x) \approx L'_n(x)$ ,  $f''(x) \approx L''_n(x)$  и т. д. Приведем вычисления для простейшего случая  $n = 2$ .

### Формулы численного дифференцирования для трех равноотстоящих узлов

Имеются три узла  $x_0, x_1, x_2$ , удаленные друг от друга на расстояние  $h$  (шаг) (рис. 3). Интерполяционный полином Лагранжа

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

<sup>5</sup> Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  близки, т. к. ординаты точек двух графиков при одинаковых абсциссах мало отличаются. Но направления касательных, проведенных к графикам (см., например, точки  $A$  и  $B$ ), резко различны, т. е. производные  $f'(x)$  и  $g'(x)$  не близки.

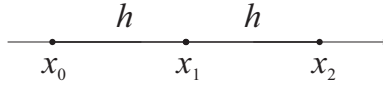


Рис. 3. Три равноотстоящих узла

Введем вспомогательную переменную  $q = \frac{x - x_0}{h}$ , тогда  $x = x_0 + hq$ , и получаем

$$L_2(x) = \frac{1}{2}y_0(q-1)(q-2) - y_1q(q-2) + \frac{1}{2}y_2q(q-1).$$

Полином Лагранжа выглядит теперь компактнее, но его нельзя непосредственно продифференцировать по  $x$ , поскольку аргументом стала  $q$ . По правилу дифференцирования сложной функции  $(L_2)'_x = (L_2)'_q q'_x = \frac{1}{h}(L_2)'_q$ , получаем следующее приближенное соотношение для производной:

$$f'(x) \approx L_2'(x) = \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{2}y_0(2q-3) - y_1(2q-2) + \frac{1}{2}y_2(2q-1) \right]. \quad (9)$$

Аналогично — для второй производной

$$f''(x) \approx L_2''(x) = \frac{1}{h^2} [y_0 - 2y_1 + y_2]. \quad (10)$$

Подстановка  $x = x_0 + hq$  при  $q = 0, 1, 2$  дает соответственно  $x = x_0, x_1, x_2$ . Поэтому из выражений (9) и (10) можно при таких значениях  $q$  найти приближенные выражения для производных в каждом из трех узлов (последнее слагаемое в каждой из нижеследующих формул — погрешность численного дифференцирования, которую мы приводим без доказательства):

первая производная

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) + \frac{h^2}{3}f'''(\xi), \quad (11)$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h}(-y_0 + y_2) - \frac{h^2}{6}f'''(\xi), \quad (12)$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{2h}(y_0 - 4y_1 + 3y_2) + \frac{h^2}{3}f'''(\xi); \quad (13)$$

---

---

вторая производная

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) - hf'''(\xi),$$

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) - \frac{h^2}{12}f^{IV}(\xi),$$

$$f''(x_2) = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) + hf'''(\xi)$$

(поскольку в формулу (10) переменная  $q$  не вошла, вторая производная в разных узлах отличается только погрешностью). Во всех формулах  $\xi$  есть некоторая (неизвестная) промежуточная точка, лежащая между узлами.

Мы подробно рассмотрели способ получения формул численного дифференцирования для случая трех равноотстоящих узлов. Приведем без вывода аналогичные формулы для случая четырех равноотстоящих узлов  $x_0, x_1, x_2, x_3$ , находящихся на расстоянии  $h$  друг от друга.

### **Формулы численного дифференцирования для четырех равноотстоящих узлов**

Первая производная

$$f'(x_0) = \frac{1}{6h}(-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{4}f^{IV}(\xi), \quad (14)$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{6h}(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3) + \frac{h^3}{12}f^{IV}(\xi), \quad (15)$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{6h}(y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{12}f^{IV}(\xi), \quad (16)$$

$$f'(x_3) = \frac{1}{6h}(-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3) + \frac{h^3}{4}f^{IV}(\xi). \quad (17)$$

Вторая производная

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}(2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3) + \frac{11}{12}h^2f^{IV}(\xi), \quad (18)$$

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) - \frac{1}{12}h^2f^{IV}(\xi), \quad (19)$$

$$f''(x_2) = \frac{1}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3) - \frac{1}{12}h^2 f^{IV}(\xi), \quad (20)$$

$$f''(x_3) = \frac{1}{h^2}(-y_0 + 4y_1 - 5y_2 + 2y_3) + \frac{1}{12}h^2 f^{IV}(\xi). \quad (21)$$

Замечания к формулам численного дифференцирования:

1) оценка погрешности уже первой производной требует предварительного знания третьей (формулы (11)–(13) и даже четвертой (!) (формулы (14)–(17) производной и притом в заранее неизвестной точке  $\xi$ ). Тем самым погрешность численного дифференцирования оценивается настолько сложно, что в лабораторной работе эта оценка не предполагается;

2) выполняется некоторое правило симметрии, позволяющее проверить правильность написания формул, а именно: коэффициенты при  $y_i$  для первой производной в узлах, симметричных относительно центрального, повторяются с обратным знаком, если прочитать формулу справа налево — ср. формулы (11) и (13), (14) и (17), (15) и (16). Для второй производной — то же, но без смены знака (ср. формулы (18) и (21), (19) и (20);

3) в узлах, близких к центральному, формулы численного дифференцирования проще и отличаются большей точностью (меньшей погрешностью), чем в крайних узлах;

4) с увеличением количества узлов точность формул численного дифференцирования повышается (это неудивительно, ведь возрастает количество информации, которая имеется у нас о дифференцируемой функции);

5) с ростом порядка производной точность формул уменьшается (погрешность растет). Это связано с тем, что дифференцирование ухудшает свойства функции (дифференцируемая всюду функция может иметь производную функцию, которая не везде будет дифференцируемой; непрерывная функция может перейти в разрывную).

---

---

## Численное интегрирование

Если функция  $f(x)$  задана аналитически (формулой) и ее первообразная  $F(x)$  является элементарной функцией, то определенный интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  вычисляется по формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Существуют ситуации, когда этой формулой невозможно или затруднительно воспользоваться:

1) подынтегральная функция  $f(x)$  задана графически или таблично; тогда первообразная  $F(x)$  не существует;

2) подынтегральная функция  $f(x)$  задана аналитически, но интеграл  $\int f(x)dx$  не берущийся, т.е. не выражается в конечном виде через элементарные функции (известно, что многие важные интегралы, часто встречающиеся в практических приложениях, таковы, в качестве примера приведем  $\int e^{-x^2} dx$ ,  $\int \frac{\sin x}{x} dx$ );

3) подынтегральная функция  $f(x)$  задана аналитически и интеграл  $\int f(x)dx$  берущийся, но первообразная  $F(x)$  слишком громоздка (см. примечание в начале гл. 3 о численном дифференцировании).

Во всех этих случаях приходится прибегать к приближенному, численному нахождению определенного интеграла. Для этого подынтегральную функцию  $f(x)$  заменяют другой, «близкой» к ней функцией, которая легко интегрируется.

---

## Формула Ньютона — Котеса

В качестве функции, «близкой» к  $f(x)$ , возьмем интерполяционный полином Лагранжа  $L_m(x)$ , совпадающий с  $f(x)$  в узлах интерполяции  $x_0, x_1, \dots, x_m$ , лежащих на отрезке интегрирования  $[a, b]$ . Полином Лагранжа имеет вид

$$L_m(x) = \sum_{i=0}^m f(x_i) L_m^i(x), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $L_m^i(x)$  — коэффициенты Лагранжа (полиномы степени  $m$ )

$$L_0^0(x) \equiv 1,$$

$$L_m^i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_m)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_m)}.$$

Если полином Лагранжа «близок» к функции  $f(x)$ , то и интегралы от них тоже должны быть близки<sup>6</sup>:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_m(x) dx = \sum_{i=0}^m f(x_i) \int_a^b L_m^i(x) dx.$$

Вводя так называемые коэффициенты Котеса (1682–1716)

$$c_m^i = \int_a^b L_m^i(x) dx,$$

получаем формулу Ньютона — Котеса порядка  $m$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_m(x) dx = \sum_{i=0}^m c_m^i f(x_i).$$

Она позволяет приближенно представить значение определенного интеграла в виде линейной комбинации значений подынтегральной функции в узлах интерполяции.

---

<sup>6</sup> В случае численного дифференцирования, как мы знаем, такое рассуждение оказалось рискованным, но здесь оно вполне оправданно. Причина в том, что дифференцирование ухудшает свойства функции (производная дифференцируемой всюду функции может стать недифференцируемой в данной точке, производная непрерывной функции — разрывной функцией), а интегрирование, как обратная к дифференцированию операция, улучшает свойства функции.

**Пример.** Вычислить коэффициенты Котеса  $c_1^0$  и  $c_1^1$ .

**Решение.** Пусть значения функции  $f(x)$  заданы в двух узлах:  $x_0 = a$  и  $x_1 = b$ . В таком случае функцию можно аппроксимировать полиномом Лагранжа первой степени

$$\begin{aligned} f(x) &\approx L_1(x) = f(x_0)L_1^0(x) + f(x_1)L_1^1(x) = \\ &= f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1)\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}. \end{aligned}$$

Интеграл от аппроксимируемой функции

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx &\approx \frac{f(a)}{a-b} \int_a^b (x-b)dx + \frac{f(b)}{b-a} \int_a^b (x-a)dx = \\ &= f(a)\frac{b-a}{2} + f(b)\frac{b-a}{2} = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]. \end{aligned}$$

Отсюда получаем коэффициенты Котеса — весовые коэффициенты при значениях аппроксимируемой функции  $f(a)$  и  $f(b)$

$$c_1^0 = c_1^1 = \frac{b-a}{2}.$$

Отметим очевидный смысл последней формулы: определенный интеграл (геометрически равный площади криволинейной трапеции) в самом грубом приближении подсчитывается как площадь трапеции (рис. 4).

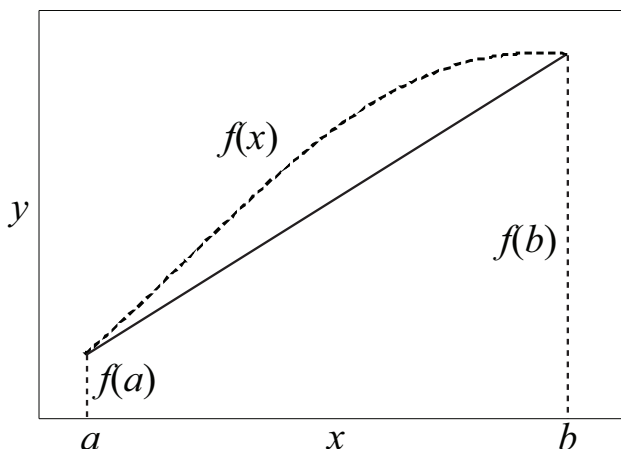


Рис. 4. Геометрическая иллюстрация простейшей формулы Ньютона — Котеса (основания трапеции — отрезки длиной  $f(a)$  и  $f(b)$ , высота трапеции  $(b-a)$ )

Итак, принципиально вычисление коэффициентов Котеса  $c_m^i$  несложно, но при больших  $m$  оно становится трудоемким. Впрочем, значения этих коэффициентов и не нужно вычислять, поскольку они табулированы. Пусть узлы интерполяции являются равноотстоящими с шагом  $h$

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \dots, \quad x_m = a + mh = b.$$

Приведем фрагмент таблицы коэффициентов Котеса  $c_m^i$  при  $m = 1, 2, \dots, 6$ .

Таблица 1

Коэффициенты Котеса  $c_m^i$  в случае равноотстоящих узлов

| $m$ | Коэффициенты Котеса $c_m^i$            |                                       |                                       |                               |
|-----|----------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------|
| 1   | $c_1^0 = c_1^1 = \frac{b-a}{2}$        |                                       |                                       |                               |
| 2   | $c_2^0 = c_2^2 = \frac{b-a}{6},$       | $c_2^1 = \frac{4(b-a)}{6}$            |                                       |                               |
| 3   | $c_3^0 = c_3^3 = \frac{b-a}{8},$       | $c_3^1 = c_3^2 = \frac{3(b-a)}{8}$    |                                       |                               |
| 4   | $c_4^0 = c_4^4 = \frac{7(b-a)}{90},$   | $c_4^1 = c_4^3 = \frac{16(b-a)}{45},$ | $c_4^2 = \frac{2(b-a)}{15}$           |                               |
| 5   | $c_5^0 = c_5^5 = \frac{19(b-a)}{288},$ | $c_5^1 = c_5^4 = \frac{25(b-a)}{96},$ | $c_5^2 = c_5^3 = \frac{25(b-a)}{144}$ |                               |
| 6   | $c_6^0 = c_6^6 = \frac{41(b-a)}{840},$ | $c_6^1 = c_6^5 = \frac{9(b-a)}{35},$  | $c_6^2 = c_6^4 = \frac{9(b-a)}{280},$ | $c_6^3 = \frac{34(b-a)}{105}$ |

Покажем, как пользоваться этой таблицей. Пусть функция  $f(x)$  задана в трех точках:  $a$ ,  $b$  и в точке  $m = \frac{a+b}{2}$  — середине отрезка  $[a, b]$ . В таком случае, выбирая из строки  $m = 2$  коэффициенты Котеса  $c_2^0, c_2^1, c_2^2$ , запишем определенный интеграл в виде

$$\int_a^b f(x) dx \approx c_2^0 f(a) + c_2^1 f(m) + c_2^2 f(b) = \frac{b-a}{6} f(a) + \frac{4(b-a)}{6} f(m) + \frac{b-a}{6} f(b).$$

По формуле Ньютона — Котеса, которая является приближенным способом интегрирования, вычисляют определенный интеграл с неко-

торой погрешностью (кроме очевидного случая, когда подынтегральная функция является полиномом степени меньшей, чем порядок формулы Ньютона – Котеса, но тогда эта формула не нужна).

Погрешность  $R$  формулы Ньютона – Котеса — это модуль разности между точным значением интеграла и приближенным значением, получающимся при замене подынтегральной функции полиномом Лагранжа,

$$R_m = \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b L_m(x) dx \right|.$$

Преобразуем это выражение и воспользуемся формулами (6), (7) оценки погрешности интерполяции

$$\begin{aligned} R_m &= \left| \int_a^b [f(x) - L_m(x)] dx \right| = \left| \int_a^b \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_m) dx \right| \leq \\ &\leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} \int_a^b |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_m)| dx. \end{aligned} \quad (22)$$

Напомним, что  $\xi \in [a, b]$  — некоторая (неизвестная) точка отрезка интегрирования,  $M_{m+1} = \max_{x \in [a, b]} |f^{(m+1)}(x)|$ . Поскольку найти ее нелегко, прак-

тическое значение оценки (22) ограничено. Иногда применяют двойной пересчет интеграла с шагами  $h$  и  $h/2$  и условно считают, что совпадающие десятичные знаки двух результатов являются верными цифрами.

Формула (22) непрактична, но из нее можно получить полезные выводы. Огрубим формулу (22) еще больше, учитывая, что каждый из сомножителей вида  $|x - x_i|$  не превосходит  $(b-a)$  — длины отрезка интегрирования

$$R_m \leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} \int_a^b (b-a)^{m+1} dx = \frac{M_{m+1}(b-a)^{m+2}}{(m+1)!}.$$

Отсюда видно, что уменьшения погрешности формулы Ньютона – Котеса можно достичь двояко: увеличением ее порядка  $m$  и (или) сужением отрезка интегрирования (если  $M_{m+1}$  изменяется с ростом  $m$  незначительно). Но первый путь малопривлекателен: формула Нью-

тона — Котеса при большом  $m$  становится громоздкой и неудобна для использования. Удобнее воспользоваться второй возможностью: отрезок интегрирования разбить на узкие участки, на каждом из которых даже формула Ньютона — Котеса небольшого порядка  $m$  обеспечит достаточную точность. Таким путем мы придем к известным формулам численного интегрирования — формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона.

### Формула прямоугольников

Разобьем отрезок интегрирования  $[a, b]$  на  $n$  равных элементарных отрезков с шагом  $h = \frac{b-a}{n}$  точками  $a_0 = a, a_1 = a + h, a_2 = a + 2h, \dots, a_n = a + nh = b$ . На каждом элементарном отрезке  $[a_{k-1}, a_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , аппроксимируем функцию  $f(x)$  полиномом Лагранжа нулевой степени по значению  $f(a_{k-1})$  на левом конце элементарного отрезка:  $L_0(x) = f(a_{k-1}) = y_{k-1}$ . Геометрически это означает замену криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком  $f(x)$ , ступенчатой фигурой (рис. 5).

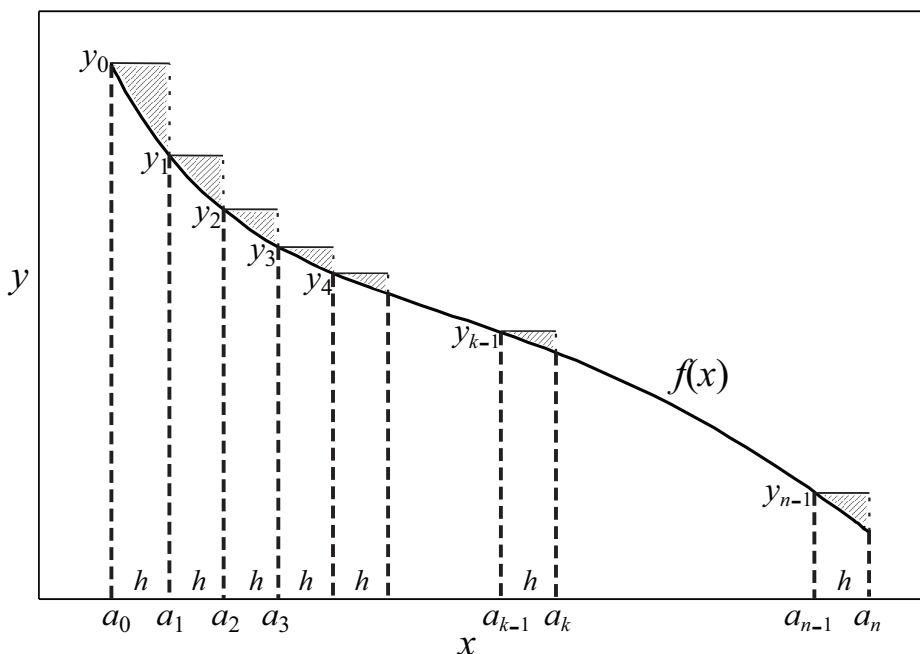


Рис. 5. Приближенное вычисление интеграла по формуле прямоугольников

Эта фигура состоит из прямоугольников с основанием  $h$  и высотами  $y_i = f(a_i)$ ,  $i = 0, 1, n-1$ . В таком случае интеграл  $\int_a^b f(x) dx$ , численно равный площади криволинейной трапеции, приближенно получается как сумма площадей прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx y_0 h + y_1 h + \dots + y_{n-1} h = h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}). \quad (23)$$

Получена формула прямоугольников приближенного вычисления интегралов.

Из рис. 5 видно, что погрешность этой формулы должна быть велика (она определяется суммарной площадью заштрихованных фигур). Для оценки погрешности воспользуемся формулой (22). На одном элементарном отрезке  $[a_{k-1}, a_k]$

$$\begin{aligned} \left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) dx - \int_{a_{k-1}}^{a_k} L_0(x) dx \right| &\leq \frac{M_1}{1!} \int_{a_{k-1}}^{a_k} |x - a_{k-1}| dx = \\ &= \frac{M_1}{1!} \int_{a_{k-1}}^{a_k} (x - a_{k-1}) dx = M_1 \frac{(x - a_{k-1})^2}{2} \Big|_{a_{k-1}}^{a_k} = \frac{M_1 h^2}{2}, \end{aligned}$$

где  $M_1 = \max_{[a, b]} |f'(x)|$ . Область интегрирования  $[a, b]$  содержит  $n$  элементарных отрезков, поэтому результирующая погрешность формулы прямоугольников

$$R_0 \leq \frac{M_1 h^2}{2} n = \frac{M_1 h}{2} (b - a) = O(h), \quad (24)$$

где мы учли, что  $h = \frac{b-a}{n}$ . Итак, погрешность линейно зависит от шага  $h$  разбиения области интегрирования на элементарные отрезки. Заметим, что при табличном задании  $f(x)$  применить формулу (24), скорее всего, не удастся, поскольку значение  $M_1$  взять неоткуда.

## Формула трапеций

По-прежнему будем делить отрезок интегрирования  $[a, b]$  на  $n$  элементарных отрезков точками  $a_k = a + kh$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , с шагом  $h = \frac{b-a}{n}$ .

На каждом элементарном отрезке  $[a_{k-1}, a_k]$  аппроксимируем функцию  $f(x)$  полиномом Лагранжа  $L_1(x)$  первой степени с узлами на концах отрезка в двух точках  $x_0 = a_{k-1}$ ,  $x_1 = a_k$ . Поскольку графиком полинома первой степени является прямая, геометрическое значение этой аппроксимации заключается в замене каждой дуги кривой  $[y_{k-1}, y_k]$  хордой (прямолинейным отрезком), стягивающей концы дуги. Уже здесь, не говоря о нижеследующей более точной формуле Симпсона, расхождение между графиком  $f(x)$  и аппроксимирующей линией (здесь это ломаная, состоящая из прямолинейных звеньев) столь мало, что построить наглядную иллюстрацию, подобную рис. 5, затруднительно. Рассмотрим только один элементарный отрезок, преувеличивая расхождение между линиями (рис. 6).

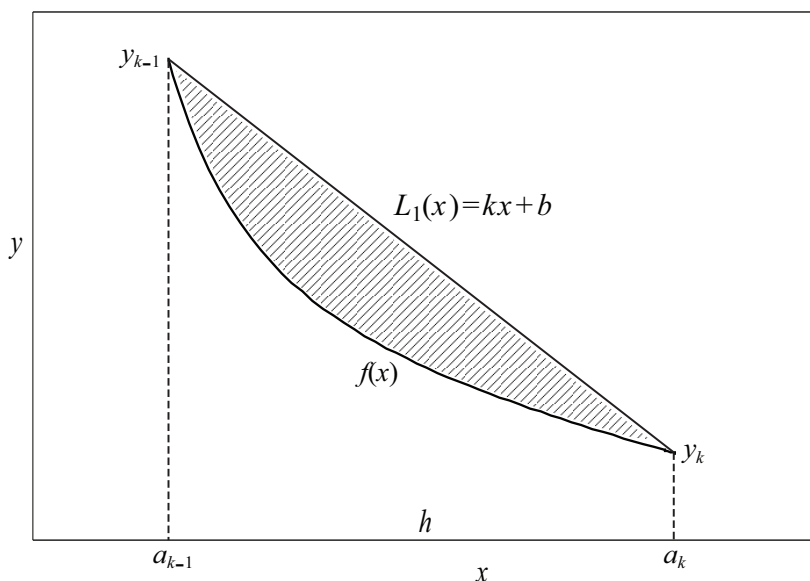


Рис. 6. Приближенное вычисление интеграла по формуле трапеций

На элементарном отрезке  $[a_{k-1}, a_k]$  построена трапеция площадью  $\frac{y_{k-1} + y_k}{2} h$ , и из таких трапеций складывается фигура, приближающая

исходную криволинейную трапецию. В результате интеграл  $\int_a^b f(x)dx$ , численно равный площади криволинейной трапеции, приближенно получается как сумма площадей трапеций:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{y_0 + y_1}{2}h + \frac{y_1 + y_2}{2}h + \frac{y_2 + y_3}{2}h + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}h = \\ &= \frac{h}{2}[y_0 + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + y_n].\end{aligned}\quad (25)$$

Получена формула трапеций приближенного вычисления интегралов.

Совокупность сегментов, подобных заштрихованному на рис. 6, определяет погрешность формулы трапеций. Для оценки погрешности воспользуемся формулой (22). На одном элементарном отрезке  $[a_{k-1}, a_k]$

$$\begin{aligned}\left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx - \int_{a_{k-1}}^{a_k} L_1(x)dx \right| &\leq \frac{M_2}{2!} \int_{a_{k-1}}^{a_k} |(x - a_{k-1})(x - a_k)|dx = \\ &= \frac{M_2}{2!} \int_{a_{k-1}}^{a_k} |x^2 - x(a_{k-1} + a_k) + a_{k-1}a_k|dx = \\ &= -\frac{M_2}{2!} \int_{a_{k-1}}^{a_k} [x^2 - x(a_{k-1} + a_k) + a_{k-1}a_k]dx = \frac{M_2 h^3}{12},\end{aligned}$$

где  $M_2 = \max_{[a, b]} |f''(x)|$ . Область интегрирования  $[a, b]$  содержит  $n$  элементарных отрезков, поэтому результирующая погрешность формулы трапеций

$$R_1 \leq \frac{M_2 h^3}{12} n = \frac{M_2 h^2}{12} (b - a) = O(h^2). \quad (26)$$

Итак, погрешность квадратично зависит от шага  $h$  разбиения области интегрирования на элементарные отрезки, а поскольку при возведении малого числа в квадрат оно уменьшается, то для формулы трапеций погрешность будет меньше, чем для формулы прямоугольников (ср. с формулой (24)). По вышеназванной причине формула (26) зачастую оказывается не практичной.

## Формула Симпсона

Продолжим разбивать отрезок интегрирования  $[a, b]$  на  $n$  элементарных отрезков точками  $a_k = a + kh$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , с шагом  $h = \frac{b-a}{n}$ , но теперь количество разбиений пусть будет четным:  $n = 2s$ , где  $s$  — целое число. Рассмотрим два смежных элементарных отрезка с тремя узлами  $a_{2k-2}$ ,  $a_{2k-1}$ ,  $a_{2k}$  (рис. 7).

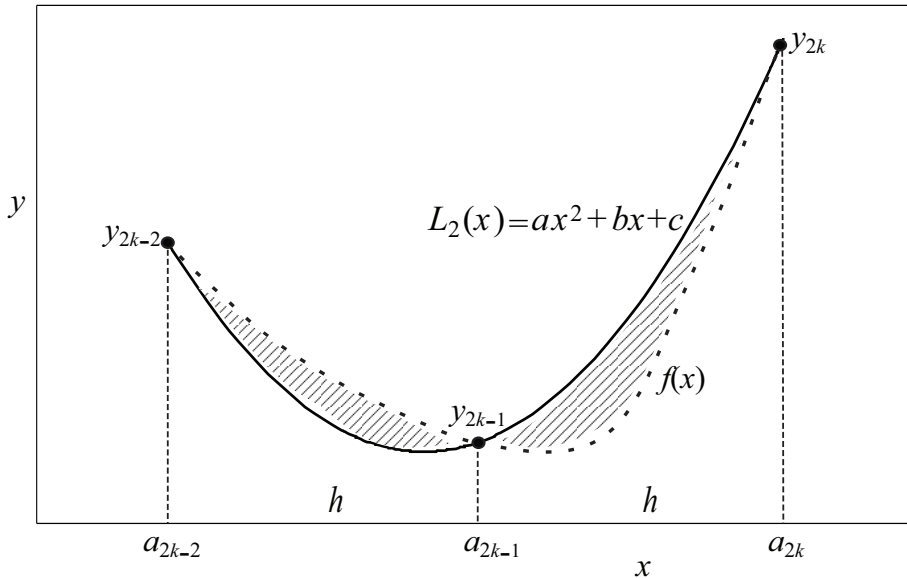


Рис. 7. Приближенное вычисление интеграла по формуле Симпсона

По значениям в трех узлах функция  $f(x)$  аппроксимируется полиномом Лагранжа второй степени  $L_2(x) = ax^2 + bx + c$ , графиком которого является парабола. Дуги парабол очень близки к графику  $f(x)$ , поэтому расхождение между ними (штрихованные области) на рис. 7 преувеличено. По формуле Ньютона — Котеса для отрезка  $[a_{2k-2}, a_{2k}]$ , беря коэффициенты Котеса из табл. 1 при  $m = 2$ , получим

$$\begin{aligned} \int_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} f(x) dx &\approx \int_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} L_2(x) dx = c_2^0 f(a_{2k-2}) + c_2^1 f(a_{2k-1}) + c_2^2 f(a_{2k}) = \\ &= \frac{2h}{6} y_{2k-2} + 4 \cdot \frac{2h}{6} y_{2k-1} + \frac{2h}{6} y_{2k} = \frac{h}{3} (y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}). \end{aligned} \quad (27)$$

Применяя формулу (27) к каждому отрезку  $[a_{2k-2}, a_{2k}]$ ,  $k = 1, 2, \dots, s$ , получим

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a_0}^{a_2} f(x) dx + \int_{a_2}^{a_4} f(x) dx + \dots + \int_{a_{2s-2}}^{a_{2s}} f(x) dx \approx \\ \approx \frac{h}{3} [(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + (y_4 + 4y_5 + y_6) + \dots + (y_{2s-2} + 4y_{2s-1} + y_{2s})].$$

Итак,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2s}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2s-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2s-1})]. \quad (28)$$

Получена формула Симпсона (1710–1761) приближенного вычисления определенного интеграла.

Оценим погрешность с помощью формулы (22). Для одного двоянного элементарного отрезка  $[a_{2k-2}, a_{2k}]$

$$\left| \int_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} f(x) dx - \int_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} L_2(x) dx \right| \leq \frac{M_3}{3!} \int_{a_{2k-2}}^{a_{2k}} |(x - a_{2k-2})(x - a_{2k-1})(x - a_{2k})| dx = \frac{M_3 h^4}{96},$$

где  $M_3 = \max_{[a, b]} |f'''(x)|$ . Область интегрирования  $[a, b]$  содержит  $n/2$  двоянных элементарных отрезков, поэтому результирующая погрешность формулы Симпсона

$$R_2 \leq \frac{M_3 h^4}{96} \frac{n}{2} = \frac{M_3 h^3}{192} (b - a) = O(h^3). \quad (29)$$

Формула Симпсона оказывается точнее формулы трапеций, не говоря уже о формуле прямоугольников. Понятно, что при табличном задании подынтегральной функции воспользоваться формулой (29) для оценки погрешности численного интегрирования практически нереально, поскольку значение  $M_3$  взять неоткуда.

**Пример.** Вычислить интеграл  $I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$  по формуле Ньютона – Ко-

теса при  $m = 4$ , а также по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона при  $n = 4$ ; сравнить результаты с точным значением интеграла.

**Решение.** Будем вести вычисления с пятью десятичными знаками. Для аналитически заданной подынтегральной функции  $f(x) = 1/x$  оценить погрешность численного интегрирования по формулам (22), (24), (26), (29) возможно, но излишне, поскольку интеграл точно вычисляется по формуле Ньютона – Лейбница, с чего мы и начнем:

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 = \mathbf{0.693\,15\dots}$$
 (бесконечная непериодическая

дробь).

Интерполяционный полином Лагранжа степени  $m=4$  в формуле Ньютона – Котеса используется, если на отрезке интегрирования есть пять равноудаленных узлов. В данном случае шаг (расстояние между узлами)  $h = \frac{b-a}{4} = \frac{2-1}{4} = 0.25$ .

Для подынтегральной функции  $f(x) = 1/x$  составим следующую таблицу (табл. 2).

Таблица 2

Значения функции  $f(x) = 1/x$  в узлах

| $k$ | $x_k = x_0 + kh$             | $y_k = 1/x_k$                           |
|-----|------------------------------|-----------------------------------------|
| 0   | $x_0 = 1$                    | $y_0 = 1$                               |
| 1   | $x_1 = x_0 + h = 1.25 = 5/4$ | $y_1 = 1/\frac{5}{4} = 4/5 = 0.800\,00$ |
| 2   | $x_2 = x_1 + h = 1.5 = 3/2$  | $y_2 = 1/\frac{3}{2} = 2/3 = 0.666\,67$ |
| 3   | $x_3 = x_2 + h = 1.75 = 7/4$ | $y_3 = 1/\frac{7}{4} = 4/7 = 0.571\,43$ |
| 4   | $x_4 = x_3 + h = 2$          | $y_4 = 1/2 = 0.500\,00$                 |

Приближенное значение интеграла по формуле Ньютона – Котеса при  $m=4$

$$\begin{aligned} I_{\text{Cotes}} &= \sum_{i=0}^4 c_4^i y_i = c_4^0 y_0 + c_4^1 y_1 + c_4^2 y_2 + c_4^3 y_3 + c_4^4 y_4 = \\ &= \frac{7}{90} \cdot 1.000\,00 + \frac{16}{45} \cdot 0.800\,00 + \frac{2}{15} \cdot 0.666\,67 + \frac{16}{45} \cdot 0.571\,43 + \\ &\quad + \frac{7}{90} \cdot 0.500\,00 = \mathbf{0.693\,18}. \end{aligned}$$

Сравнивая результат с точным, видим, что формула Ньютона – Котеса дает четыре верных десятичных знака.

---

---

Приближенное значение интеграла по формуле прямоугольников (23)

$$I_{\text{прям}} = h[y_0 + y_1 + y_2 + y_3] = \\ = 0.25 \cdot [1.000.00. + 0.800.00. + 0.666.67. + 0.571.43] = \mathbf{0.759\ 53}.$$

Ни одного верного десятичного знака!

Приближенное значение интеграла по формуле трапеций (25)

$$I_{\text{трап}} = \frac{h}{2}[y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3) + y_4] = \mathbf{0.697\ 02}.$$

Два верных знака после запятой.

Приближенное значение интеграла по формуле Симпсона (28)

$$I_{\text{Симп}} = \frac{h}{3}[(y_0 + y_4) + 4(y_1 + y_3) + 2y_2] = \mathbf{0.693\ 25}.$$

Три верных знака после запятой.

Итак, точнее всех, как и можно было ожидать, оказалась формула Ньютона — Котеса. Ее недостатки — громоздкость и необходимость привлечения специальных таблиц (коэффициентов Котеса). Формулы, являющиеся упрощенными следствиями из формулы Ньютона — Котеса, дают не столь точные результаты. При этом формула Симпсона, будучи гораздо проще формулы Ньютона — Котеса, успешно с ней конкурирует по точности. Формула прямоугольников столь груба (при взятом нами шаге  $h$ ), что вряд ли применима на практике.

Видимо, формулы трапеций и Симпсона являются самыми «практичными», сочетая простоту и удовлетворительную точность.

Заметим еще раз, что при табличном задании подынтегральной функции попытка оценки погрешности численного интегрирования по формулам (22), (24), (26), (29) наталкивается на непреодолимые трудности.