

Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Напомним некоторые нужные для дальнейшего понятия. **Решением** дифференциального уравнения (ДУ) I порядка $y' = f(x, y)$, разрешенного относительно производной, называется функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество:

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)).$$

Задача Коши

$$\left. \begin{aligned} y' &= f(x, y), \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

состоит в нахождении частного решения ДУ, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$. Геометрический смысл задачи Коши: найти такую интегральную кривую (график решения), которая проходит через заданную начальную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Аналитическое решение задачи Коши (или решение в квадратурах) заключается в получении частного решения путем выполнения конечного числа операций дифференцирования, интегрирования и арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление). К сожалению, круг задач, решаемых в квадратурах, крайне узок, поэтому актуальна задача приближенного, численного интегрирования ДУ.

Решить задачу Коши численно — значит для заданной последовательности значений аргумента (узлов) $x_0, x_1, \dots, x_n$ и числа y_0 (значение искомой функции в начальном узле x_0), не находя самого решения $y = \varphi(x)$, приближенно вычислить значения $y_1, y_2, \dots, y_n$ этого решения в остальных узлах. Численное решение задачи Коши позво-

ляет вместо отыскания точного решения $y = \varphi(x)$ в виде формулы получить таблицу значений

x_i	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$\varphi(x_i)$	$y_0 = \varphi(x_0)$	y_1	y_2	...	y_n

этой функции¹⁸. Рассмотрим некоторые способы численного интегрирования ДУ.

Метод ломаных Эйлера

Метод (ломаных) Эйлера (1707–1783) основан на кусочной замене искомой функции полиномом первой степени, т.е. на линейной интерполяции. Впрочем, точнее было бы говорить о линейной экстраполяции, т.к. речь идет о нахождении значений функции $y = \varphi(x)$ в соседних узлах, а не между узлами.

Выбрав малый шаг h , построим систему равноотстоящих узлов $x_0, x_1, x_2, \dots$, где $x_k = x_0 + kh$ (рис. 18).

В начальной точке $M_0(x_0, y_0)$ проведем прямую с угловым коэффициентом $k_0 = y'(x_0)$ ($= f(x_0, y_0)$ в силу дифференциального уравнения (67)). Эта прямая является касательной к (неизвестной) интегральной кривой — графику искомого решения $y = \varphi(x)$ задачи Коши. Уравнение касательной

$$y - y_0 = k_0(x - x_0) \text{ или } y = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0).$$

В качестве приближенного решения задачи Коши (67) в узле x_1 примем ординату y_1 точки пересечения касательной с вертикальной прямой $x = x_1$:

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x_1 - x_0) = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot h.$$

Через точку $M_1(x_1, y_1)$ проведем прямую с угловым коэффициентом $k_1 = y'(x_1)$ ($= f(x_1, y_1)$ в силу ДУ (67)). Ее уравнение

$$y = y_1 + f(x_1, y_1) \cdot (x - x_1). \quad (68)$$

¹⁸ Потом можно получить и приближенное задание функции формулой, например, аппроксимируя ее полиномом Лагранжа.

Эта прямая уже не является касательной к интегральной кривой $y = \varphi(x)$, т. к. точка $M_1(x_1, y_1)$ фиктивная, она не лежит на интегральной кривой. Пересечение прямой (68) с вертикалью $x = x_2$ — точка M_2 — имеет ординату $y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) \cdot (x_2 - x_1) = y_1 + f(x_1, y_1) \cdot h$.

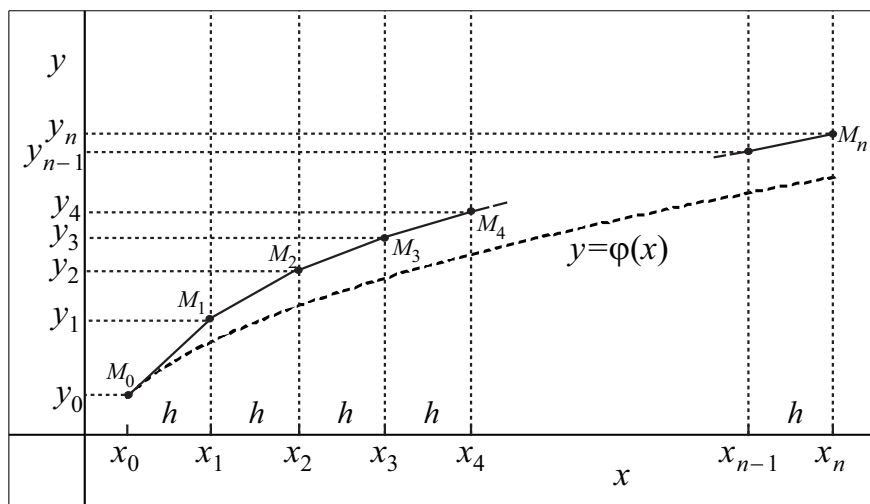


Рис. 18. Графическая иллюстрация метода Эйлера¹⁹

Через точку $M_2(x_2, y_2)$ проведем прямую с угловым коэффициентом $k_2 = y'(x_2) = f(x_2, y_2)$ до пересечения с вертикалью $x = x_3$. Ордината точки пересечения $y_3 = y_2 + f(x_2, y_2) \cdot h$. Точка $M_3(x_3, y_3)$ находится дальше по вертикали от интегральной кривой $y = \varphi(x)$, чем M_2 (см. рис. 18). Погрешность метода с каждым следующим шагом увеличивается.

Таким образом получаем ломаную Эйлера, составленную из отрезков прямых,

$$y = y_k + f(x_k, y_k) \cdot (x - x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ордината каждой последующей угловой точки ломаной

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k). \quad (69)$$

¹⁹ Ломаная Эйлера (сплошная линия) приближенно представляет гипотетический график решения задачи Коши (штриховая линия). Последний график неизвестен, поскольку задача Коши не решена в квадратурах. Обе линии исходят из начальной точки $M_0(x_0, y_0)$; расхождение между ними постепенно возрастает.

Метод ломаных Эйлера груб и дает удовлетворительную точность лишь при малом шаге h . Действительно, разложим точное решение ДУ $y' = f(x, y)$ в ряд Тейлора в окрестности узла x_k :

$$\begin{aligned} y(x_k + h) &= y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k) \cdot h + O(h^2) = \\ &= y(x_k) + f(x_k, y_k) \cdot h + O(h^2). \end{aligned}$$

Сравнивая эту формулу с формулой (69), получаем, что погрешность последней того же порядка малости, что и h^2 .

Пример. Решить задачу Коши

$$\left. \begin{aligned} y' &= -y, \\ y(0) &= 1 \end{aligned} \right\}$$

с шагом $h = 0,2$ на отрезке $[0, 1]$ методом Эйлера; сравнить приближенное решение с точным.

Решение. Начнем с решения в квадратурах. Дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{dy}{dx} = -y$$

является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим их

$$\frac{dy}{y} = -dx,$$

проинтегрируем

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx; \quad \ln|y| = -x + C; \quad y = e^{C-x}.$$

Общее решение ДУ найдено. Накладываем на него начальное условие

$$y(0) = e^{C-0} = 1; \quad C = 0.$$

Итак, частное решение ДУ (решение задачи Коши) $y = e^{-x}$.

Теперь применим приближенный метод Эйлера. В обозначениях выражения (67)

$$f(x, y) = -y, \quad x_0 = 0; \quad y_0 = 1.$$

В таком случае в силу формулы (69),

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) = y_k + 0.2 \cdot f(x_k, y_k) = y_k - 0.2y_k = 0.8y_k, \\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Составим сопоставительную таблицу значений y_k приближенного решения по Эйлера и значений точного решения $y_k^* = e^{-x_k}$:

k	0	1	2	3	4	5
$x_k = x_0 + hk$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y_k	1	0.8	0.64	0.512	0.4096	0.32768
y_k^*	1	0.8187	0.6703	0.5488	0.4493	0.3679

Грубое согласие между точными и приближенными результатами есть, но оно постепенно ухудшается.

Выводы по методу Эйлера следующие.

1. Расчетные формулы метода Эйлера:

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k, \text{ где } \Delta y_k = h \cdot f(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

2. Метод Эйлера — представитель одношаговых приближенных методов, в которых решение в $(k+1)$ -м узле получается на основе решения только в одном предыдущем k -м узле. Тем самым информация о более ранних уже вычисленных значениях игнорируется. «Расточительный» подход к получаемым результатам оборачивается повышенным объемом вычислений. Одношаговые методы не самые экономичные в этом смысле.

3. Как и в любом одношаговом методе, начиная со второго шага исходное значение y_k в формуле $y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$ само является приближенным, т. е. погрешность на каждом последующем шаге систематически возрастает.

4. Оценка погрешности метода затруднительна. Часто пользуются эмпирическим правилом двойного пересчета (половинного шага): дважды проходят заданный отрезок интегрирования ДУ с шагами h и $h/2$. Совпадение соответствующих десятичных знаков в полученных результатах дает основание считать эти знаки верными.

5. Уменьшение h повышает точность вычислений, но резко увеличивает их объем. В целом метод ломаных Эйлера применим только для грубой прикидки.

Метод последовательного дифференцирования

К методу Эйлера можно прийти и без геометрических построений. Разложим искомое решение задачи Коши

$$\left. \begin{aligned} y' &= f(x, y), \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \right\}$$

в ряд Тейлора в окрестности начальной точки x_0

$$y(x) = \underbrace{y(x_0)}_{=y_0 \text{ (н.у.)}} + \underbrace{y'(x_0)}_{=f(x_0, y_0) \text{ в силу ДУ}} \cdot (x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots \quad (70)$$

Ограничиваясь в разложении первыми двумя (линейными по x) слагаемыми и полагая $x = x_1$, снова получим формулу (69) метода Эйлера

$$y(x_1) = y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x_1 - x_0) = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0).$$

Учтем теперь еще одно квадратичное по x слагаемое в формуле (70). Для этого потребуется вычислить $y''(x_0)$. Продифференцируем по x обе части ДУ $y' = f(x, y)$:

$$(y')' = y''(x) = \frac{d}{dx} f(x, y(x)) = f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{=f(x, y) \text{ в силу ДУ}} = f'_x + f'_y \cdot f.$$

Полагая в выражении (70) $x = x_1$, получим во втором порядке разложения

$$y(x_1) = y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \left[f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot f(x, y) \right] \bigg|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \cdot h^2.$$

Первые два слагаемых в правой части соответствуют методу Эйлера, а третье — поправка к нему. Для произвольного узла

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) + \frac{1}{2} \left[f'_x + f'_y \cdot f \right] \bigg|_{\substack{x=x_k \\ y=y_k}} \cdot h^2. \quad (71)$$

Удерживая в ряду Тейлора (70) больше слагаемых, можно было бы получить сколь угодно точные формулы приближенного решения задачи Коши.

В этом состоит метод последовательного дифференцирования, который еще называют методом разложения решения в степенной ряд.

Неудобство разложения решения ДУ в степенной ряд связано с тем, что в расчетные формулы, наряду с $f(x, y)$, входят ее частные производные. В выведенную формулу (71), включающую слагаемые до h^2 включительно, входят f'_x, f'_y ; в формулу с h^3 войдут вторые частные производные, и т. д. Но вычисление частных производных трудно автоматизировать — это задача не для стандартно применяемых языков программирования²⁰. Поэтому частные производные пришлось бы искать вручную и конструировать с их помощью громоздких формул.

Альтернативой методу последовательного дифференцирования является метод Рунге — Кутты, лишенный отмеченного недостатка.

Метод Рунге — Кутты

Идея, предложенная Рунге (1856—1927) и Куттой (1867—1944), заключается в том, чтобы при численном решении задачи Коши (67) не использовать в расчетных формулах частные производные функции $f(x, y)$; использовать только ее саму, зато вычислять на каждом шаге ее значения в нескольких точках²¹.

Проиллюстрируем это на примере одного из возможных методов Рунге — Кутты II порядка. Из определения производной

$$y'(x_k) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y(x_k)}{\Delta x} = \lim_{x_{k+1} \rightarrow x_k} \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{x_{k+1} - x_k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y_{k+1} - y_k}{h} \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{h}. \quad (72)$$

В финальное выражение входят значения функции y в двух точках, а производной уже нет. Подставим это приближенное выражение для производной в решаемое ДУ $y' = f(x, y)$, беря значение правой части в k -м узле

²⁰ Разве что для языков сверхвысокого уровня — Mathematica, Maple, Matlab.

²¹ В сущности эта же идея применялась нами в методах хорд и секущих численного решения уравнений — см. формулу (37).

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(x_k, y_k).$$

Отсюда $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$, и мы снова получили метод Эйлера (69)! Но поскольку для аппроксимации производной y' взяты две точки, то и для правой части ДУ $f(x, y)$ уместно привлечь две точки:

$$\frac{1}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})]. \quad (73)$$

Совмещая выражения (72) и (73)

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \frac{1}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})],$$

после преобразования получим

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})]. \quad (74)$$

Искомой величиной в уравнении (74) является y_{k+1} , входящей в обе части уравнения. Решать это уравнение можно методом итераций, беря в качестве начального приближения то значение $y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$, которое получается в методе Эйлера. Тогда

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \left[f(x_k, y_k) + f \left(x_k + h, \underbrace{y_k + h \cdot f(x_k, y_k)}_{\text{Эйлер}} \right) \right] \quad (75)$$

или, для придания этой формуле стандартного вида,

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}(r_1 + r_2), \quad (76)$$

где

$$r_1 = h \cdot f(x_k, y_k), \quad (77)$$

$$r_2 = h \cdot f(x_k + h, y_k + r_1). \quad (78)$$

Формулы (76)–(78) представляют метод Рунге – Кутты II порядка²². Применяют их в такой последовательности: сначала находят r_1 (77), его подставляют в r_2 (78); в заключение вычисляют y_{k+1} (76).

²² Формально порядок метода можно связать с количеством величин r_i , или, что то же, с количеством точек, в которых вычисляется значение функции $f(x, y)$.

Покажем, что эти формулы с точностью до h^2 включительно согласуются с формулой (71), полученной другим способом. Для этого выражение $f(x_k + h, y_k + h \cdot f(x_k, y_k))$, входящее в формулу (75), разложим в ряд по степеням h до линейных слагаемых включительно²³:

$$\begin{aligned} f(x_k + h, y_k + h \cdot f(x_k, y_k)) &\approx \\ &\approx f(x_k, y_k) + f'_x(x_k, y_k) \cdot h + f'_y(x_k, y_k) \cdot h f(x_k, y_k). \end{aligned}$$

Подставим преобразованное выражение в формулу (75), откуда оно было извлечено:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &\approx y_k + \frac{h}{2} \cdot f(x_k, y_k) + \\ &+ \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f'_x(x_k, y_k) \cdot h + f'_y(x_k, y_k) \cdot h f(x_k, y_k)] = \\ &= y_k + h \cdot f(x_k, y_k) + \frac{h^2}{2} [f'_x(x_k, y_k) + f'_y(x_k, y_k) \cdot f(x_k, y_k)]. \end{aligned}$$

Это точно совпадает с формулой (71), выведенной методом последовательного дифференцирования. Однако формулы (76)–(78) не требуют вычисления частных производных, поэтому они удобнее.

Подробно ознакомившись с методом Рунге–Кутты II порядка, заметим, что чаще используются родственные более точные (но и более громоздкие) методы Рунге – Кутты высших порядков.

Один из самых известных — метод Рунге–Кутты IV порядка, часто без уточнений называемый просто методом Рунге – Кутты,

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4), \quad (79)$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= h \cdot f(x_k, y_k), \\ r_2 &= h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{r_1}{2}\right), \end{aligned}$$

²³ Вспомним, что ряд Тейлора для функции двух переменных имеет вид $f(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + \dots$

$$r_3 = h \cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{r_2}{2}\right),$$

$$r_4 = h \cdot f(x_k + h, y_k + r_3),$$

причем сначала последовательно вычисляются r_1, r_2, r_3, r_4 , а затем — y_{k+1} (79).

Пример. Решить задачу Коши

$$\left. \begin{aligned} y' &= y(1-x), \\ y(0) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

методом Рунге — Кутты на отрезке $[0; 0.5]$ с шагом $h = 0.05$. Сравнить полученное решение с точным и решением по методу Эйлера.

Решение. Начнем с нахождения точного решения. ДУ относится к уравнениям с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = y(1-x); \quad \frac{dy}{y} = (1-x)dx; \quad \int \frac{dy}{y} = \int (1-x)dx; \quad \ln|y| = x - x^2/2 + \ln C.$$

Итак, общее решение ДУ (80):

$$y(x) = Ce^{x-x^2/2}.$$

Применим начальное условие:

$$y(0) = Ce^0 = 1; \quad C = 1.$$

Итак, получено точное решение $y(x) = e^{x-x^2/2}$ задачи Коши.

Подробно покажем первый (из десяти!) этап приближенного решения методом Рунге — Кутты. Правая часть ДУ $f(x, y) = y(1-x)$; $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Вычислим величины r_i :

$$r_1 = h f(x_0, y_0) = 0.05 \cdot y_0 (1 - x_0) = 0.05 \cdot 1 \cdot (1 - 0) = 0.05;$$

$$r_2 = h f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{r_1}{2}\right) = 0.05 \left(y_0 + \frac{r_1}{2}\right) \left(1 - \left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right) =$$

$$0.05 \cdot \left(1 + \frac{0.05}{2}\right) \cdot \left(1 - \left(0 + \frac{0.05}{2}\right)\right) = 0.04997;$$

$$\begin{aligned}
r_3 &= h f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{r_2}{2}\right) = 0.05\left(y_0 + \frac{r_2}{2}\right)\left(1 - \left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right) = \\
&= 0.05 \cdot \left(1 + \frac{0.04997}{2}\right) \cdot \left(1 - \left(0 + \frac{0.05}{2}\right)\right) = 0.04997; \\
r_4 &= h f(x_0 + h, y_0 + r_3) = 0.05(y_0 + r_3)(1 - (x_0 + h)) = \\
&= 0.05 \cdot (1 + 0.04997) \cdot (1 - (0 + 0.05)) = 0.04987.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \frac{1}{6}(r_1 + 2r_2 + 2r_3 + r_4) = \\
&= 1 + \frac{1}{6} \cdot (0.05 + 2 \cdot 0.04997 + 2 \cdot 0.04997 + 0.04987) = 1.049958.
\end{aligned}$$

Сравнение решений, получаемых разными методами, представлено в виде табл. 4.

Таблица 4

Решения, полученные разными методами

x	y		
	Эйлер	Рунге – Кутта IV порядка	точное решение $y = e^{x-x^2/2}$
0	1	1	1
0.05	1.05*	1.049958	1.049958
0.1	1.099875**	1.099659	1.099659
0.15	1.149369	1.148837	1.148837
.....			
0.45	1.423065	1.417295	1.417295
0.5	1.462199	1.454991	1.454991

Примечания: *, ** — все вычисления производятся методом Эйлера.

* $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + hy_0(1 - x_0) = 1 + 0.05 \cdot 1 \cdot (1 - 0) = 1.05$.

** $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.05 + 0.05y_1(1 - x_1) = 1.05 + 0.05 \cdot 1.05 \cdot (1 - 0.05) = 1.099875$.

Отметим превосходное согласие результатов в двух последних столбцах.

Итоги по численному решению ДУ.

1. Метод Рунге – Кутты, сравнимый по точности с методом разложения в степенной ряд, лучше поддается автоматизации на ЭВМ, поскольку не требует вычисления частных производных. Метод Эйлера уступает по точности этим методам.

2. Все рассмотренные методы решения ДУ — метод Эйлера, метод разложения в степенной ряд, метод Рунге – Кутты — являются одноша-

говыми. Напомним, что это означает построение y_{k+1} на основе только y_k с игнорированием более ранних предшествующих результатов.

3. Все одношаговые методы имеют проблемы с оценкой погрешности результатов. На практике применяется эмпирическое правило двойного пересчета (половинного шага).

4. Все одношаговые методы сопряжены с избыточными вычислениями, объем которых можно существенно уменьшить при более рациональном использовании уже полученных результатов.

5. Альтернативой одношаговым являются многошаговые методы интегрирования ДУ — семейство методов Адамса²⁴. В этих методах для вычисления y_{k+1} используется несколько значений приближенного решения на предыдущих шагах: $y_k, y_{k-1}, y_{k-2}, \dots$. Поскольку к моменту вычисления y_{k+1} они уже найдены, можно избежать многочисленных вычислений значений $f(x, y)$. Но, чтобы метод Адамса мог стартовать, первые значения $y_0, y_1, \dots$ все-таки приходится находить одношаговыми методами. В целом методы Адамса в несколько раз менее трудоемки, чем метод Рунге — Кутты.