Белорусская государственная
орденов Октябрьской Революции
и Трудового Красного Знамени
сельскохозяйственная академия

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЙ ПО ТЕМЕ «ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ»

ВВЕДЕНИЕ

Математика как наука возникла в связи с необходимостью решения практических задач: измерений на местности, навигации и т.д. Вследствие этого одной из её проблем было получение числового результата той или иной задачи.

Великие учёные прошлого сочетали в своих исследованиях изучение явлений природы, получение их математического описания – модели и её исследование. Анализ некоторых усложнённых моделей потребовал создания специальных, как правило, приближённых методов решения задач. Названия большинства из них: методы Ньютона, Эйлера, Лобачевского, Гаусса, Чебышева и других свидетельствуют о вкладе выдающихся учёных своего времени в формирование математики в целом и её раздела «Численные методы решения задач».

Сегодня широкое распространение и развитие приближённых методов можно связать с математизацией других наук: экономики, химии, биологии, медицины, планирования, социологии, лингвистики, ещё недавно казавшихся далёкими от математики. Суть математизации состоит в построении математических моделей процессов и явлений и в разработке методов их исследования.

Целью дисциплины «Численные методы решения задач» является подготовка студентов к применению с помощью ЭВМ вычислительных алгоритмов решения математических задач, возникающих в процессе математического моделирования.

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ И КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ

1.1. Классификация моделей

Модели самолётов, судов, автомобилей и других средств транспорта знакомы нам с детства. В обыденной жизни известно, что модель – это имитация, повторение какого-либо реального объекта. Например, глобус – модель земного шара, плюшевый медведь – модель живого медведя.

А что понимается под этим словом?

Модель – это искусственно введенный объект для изучения исследуемого предмета (явления) или отдельных его частей (свойств).

Понятие модели тесно связано с понятием информатизации. Сущность любой модели заключена в том, что с её помощью можно получить информацию о свойствах моделируемого объекта.

В зависимости от формы представления различают два основных вида моделей: предметные и образно-знаковые.

Предметная модель является представлением оригинала в виде макета или аналогичного объёмного предмета, а образно-знаковая – описанием моделируемого объекта в виде образов и знаков.

Моделирование – это процесс создания и использования моделей для решения практических задач.

В чём польза ввода моделей и какие условия должны быть для этого соблюдены?

Необходимость моделирования возникает по следующим причинам:

1) не всегда можно повторить эксперимент на реальном объекте в одних и тех же условиях (например, изменилась погода);

2) многие эксперименты невозможно провести на самом оригинале (например, эксперимент связан с разрушением, уничтожением оригинала);

3) исследование самого оригинала является дорогостоящим и трудоемким процессом;

4) исследование оригинала может оказаться длительным по времени.

Польза от моделирования может быть получена при соблюдении следующих условий:

– модель обеспечивает адекватное (правильное) отображение свойств оригинала;

– она позволяет устранить проблемы, присущие проведению эксперимента на реальном объекте (оригинале).

В научных исследованиях чаще других используются математические модели и математическое моделирование, потому что математика даёт возможность математизировать свойства изучаемых объектов и явлений.

Математическая модель– это образно-знаковая модель, представленная в виде совокупности математических соотношений (выражений, уравнений и неравенств).

Математическое моделирование – это замена исследуемого объекта (оригинала) его математической моделью и изучение оригинала путем исследования математических соотношений.

Примеры.

1. Уравнение $S = v \cdot t$ – это математическая модель равномерного прямолинейного движения.

2. Уравнение $F = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$ – зависимость взаимного притяжения материальных тел к друг другу.

3. Закон Ньютона $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ – это математическая модель движения тела под действием силы.

Математическая модель по форме её представления может быть документальной и компьютерной. Сегодня математическая компьютерная модель – это универсальный инструмент в руках исследователя. Преимущества её связаны с возросшими возможностями компьютерной техники. В связи с этим можно создавать модели любой сложности.

1.2. Принципы построения математических моделей

Существуют определённые принципы, которых должен придерживаться исследователь при построении математических моделей.

1. **Принцип информационной достаточности.** Он формулируется следующим образом. При полном отсутствии информации об объекте исследования *построение модели невозможно*. При наличии полной информации об оригинале *построение модели лишено смысла*. Существует некоторый критический уровень знаний об объекте (**уровень информационной достаточности**), при котором модель может быть построена.

2. **Принцип осуществимости.** Создаваемая модель должна обеспечивать достижения поставленной цели исследования с вероятностью, *существенно отличающейся от нуля, и за конечное время.*

3. **Принцип множественности моделей.** Создаваемая модель должна отражать в первую очередь те свойства объекта (явления), которые существенно влияют на выбранный критерий исследования. При использовании любой конкретной модели изучаются только некоторые стороны (свойства) реального объекта. Для изучения его иных сторон (свойств) должны быть созданы другие модели. Таким образом, иногда для полного описания некоторого объекта необходима компоновка ряда моделей.

Например, математической моделью падения тела с высоты h является уравнение $h = v_0 \cdot t + \frac{g \cdot t^2}{2}$. Эта модель хорошо характеризует падение металлического шарика с высоты h, но совершенно непригодна для описания падения листа с дерева или парашютиста. В данном случае нужна другая модель.

4. **Принцип адекватности.** В общем случае под адекватностью понимают степень соответствия модели тому реальному явлению или объекту, для описания которого она строится. Степень соответствия модели реальному объекту устанавливается методами математической статистики. Суть этих методов заключается в проверке выдвинутой гипотезы (в данном случае – об адекватности модели) на основе статистических критериев.

5. **Принцип устойчивости.** Устойчивость модели – это её способность сохранять адекватность при исследовании в определённом диапазоне изменения факторов.

Как правило, для составления математической модели необходимо быть специалистом в той области знаний, объектом которой является её прототип или явление, а также необходимо владеть основными методиками её реализации. В большинстве случаев этим занимается группа специалистов различного профиля. При этом процесс математического моделирования можно представить в виде следующей схемы (рис. 1).

При составлении математической модели необходимо стремиться к её упрощению. Для этого в модель включают только наиболее значимые для процесса факторы.

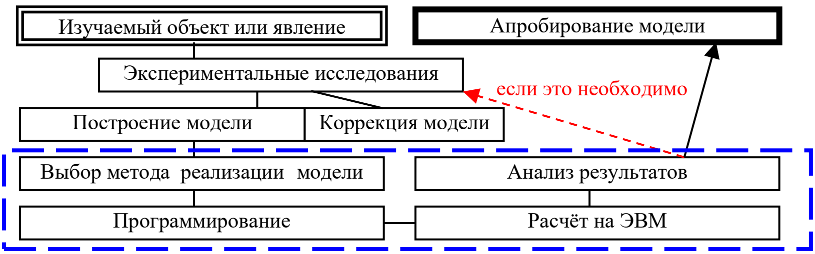

Рис. 1. Схема процесса математического моделирования.

Например, при падении тяжёлого металлического шара на сам процесс влияет не только сила тяжести, но и силы трения шарика о воздух. Однако если учитывать все факторы, в той или иной мере оказывающие влияние на процесс, модель станет громоздкой, при этом результаты существенно не изменятся. В данной ситуации такими малозначительными факторами часто пренебрегают.

После выбора метода реализации модели наступают этапы программирования – составления электронной программы решения и расчёта её на ЭВМ. Для этого существуют различные системы программирования: Pascal, Delphi, Ci, а также мощные математические пакеты, объединяющие уже готовые алгоритмы и сервисные модули: Математика, MathCad, EXCEL и т. д.

Следующим этапом математического моделирования является анализ модели. В нём должны быть даны ответы на приведенные ниже вопросы.

1. Является ли модель адекватной, сходящейся и устойчивой?
2. Каковы условия сходимости и устойчивости модели?
3. Какова погрешность результатов?
4. Каким образом можно использовать результаты в дальнейших исследованиях?

При этом необходимо помнить, что любая реализация модели связана с вычислительными ошибками, так как параметры, входящие в неё, как правило, получены с некоторой погрешностью. Бывает так, что небольшие погрешности каждого параметра приводят в результате к катастрофическим погрешностям самого результата. Проблемами оценки точности вычислений занимается теория погрешностей.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение модели. Примеры моделей.
2. Моделирование. Что это за процесс?
3. Какие проблемы решает моделирование? Как вы это понимаете?
4. Какие классы моделей вы знаете? Дайте их определение и приведите примеры.
5. Что такое математическая модель? Привести примеры математических моделей.
6. Каких принципов нужно придерживаться при построении моделей?
7. Какие этапы необходимо пройти исследователю при построении модели?
8. В чём заключается этап анализа математической модели?

2. ПОГРЕШНОСТЬ ПРИБЛИЖЁННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

2.1. Источники и классификация погрешности

В ходе решения математических задач могут возникнуть погрешности по различным причинам.

1. При составлении математической модели физического процесса или явления приходится принимать условия, упрощающие постановку задачи. Поэтому математическая модель не отражает реальный процесс, а дает его идеализированную картину. Погрешность, возникающая при этом, называется погрешностью постановки задачи.

2. Часто приходится для решения задачи применять приближенный метод (интеграл заменяют квадратурной суммой, производную заменяют разностью, функцию – многочленом). Погрешность, возникающая при этом, называется погрешностью метода.

3. Часто исходные данные заданы не точно, а приближенно. При выполнении вычислений погрешность исходных данных, как правило, переходит в погрешность результата. Такая погрешность называется погрешностью арифметических действий.

4. Погрешность, возникающая при округлении бесконечных и конечных десятичных чисел, имеющих большее число десятичных знаков, чем нужно в округлении, называется погрешностью округления.

Соответственно различают неустранимую погрешность, погрешность метода, вычислительную погрешность.

Часто неустранимую погрешность подразделяют на две части:

- **неустранимую погрешность** – погрешность, являющуюся следствием неточности задания числовых данных;
- **погрешность математической модели** – погрешность, являющуюся следствием несоответствия математического описания задачи реальному объекту.

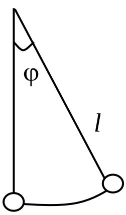

Рис. 2.

Проиллюстрируем смысл этих понятий на следующем примере.

Пусть имеется маятник (рис. 2), начинающий движение в момент времени $t = t_0$. Требуется предсказать угол φ отклонения от вертикали в момент времени t_1. С определёнными допущениями в качестве математической модели можно использовать следующую:

$$l \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + g \cdot \sin(\varphi) + \mu \cdot \frac{d\varphi}{dt} = 0 ,$$

где l – длина маятника;

μ – коэффициент трения.

Как только принимается эта модель, её решение заведомо приобретает неустранимую погрешность, в частности, потому что реальное трение зависит от скорости нелинейно. С другой стороны, любой параметр, входящий в данную модель при фактическом её использовании, есть величина приближённая (измеренная с определённой точностью и зависящая от прибора, которым производился замер).

Название "неустранимая ошибка" соответствует её существу: она неконтролируема в процессе численного решения и может быть уменьшена только за счёт более точного описания физической задачи или более точного определения её параметров.

Данное дифференциальное уравнение не имеет точного решения, однако может быть решено численно, например методом Рунге-Кутта. Вследствие этого возникнет погрешность метода.

Вычислительная погрешность может возникнуть, например, из-за конечности количества разрядов чисел, участвующих в вычислениях.

Пусть x – точное значение отыскиваемой величины (в данном случае – реальный угол отклонения маятника в момент времени t_1), а x^*– её приближенное значение, соответствующее принятому математическому описанию, x_h – решение задачи, получаемое при реализации численного метода в предположении отсутствия округлений, x_h^*– приближение к решению задачи, получаемое при реальных вычислениях. Согласно введенным обозначениям можно выделить следующие погрешности:

$\Delta_1 = x^* - x$ – неустранимая погрешность,

$\Delta_2 = x_h - x^*$ – погрешность метода,

$\Delta_3 = x_h^* - x_h$ – вычислительная погрешность.

Тогда полная погрешность результата

$$\Delta = x_h^* - x = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 . \qquad (1)$$

Во многих случаях под термином "погрешность" понимают не рассмотренные выше разности между приближениями, а некоторые меры близости между ними: $\Delta = \left|x_h^* - x\right|$, $\Delta_1 = \left|x^* - x\right|$, $\Delta_2 = \left|x_h - x^*\right|$, $\Delta_3 = \left|x_h^* - x_h\right|$. В таком случае обычно оперируют оценкой:

$$\Delta \le \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \,. \qquad (2)$$

Может возникнуть вопрос: зачем изучать неустранимую погрешность решения задачи, если она всё равно будет в процессе решения.

Исследователь, занимаясь анализом различных факторов на погрешность решения и зная требуемую точность искомого результата, практически всегда может получить простейшее описание процесса с допустимой погрешностью. Если же исследователь использует уже готовую математическую модель, то по величине неустранимой погрешности он может судить о необходимой точности метода для решения поставленной задачи. При решении большинства задач нет смысла применять метод решения с погрешностью, существенно меньшей, чем величина неустранимой погрешности. Поэтому, имея представление о величине неустранимой погрешности, можно разумно сформулировать требования к точности результата численного решения задачи.

В процессе обсуждения вопроса о точности результата численного вычисления полезно ответить на приведенные ниже вопросы.

1. Где в дальнейшем будет использован результат и нужна ли там выбранная точность?

2. Могут ли быть определены с соответствующей точностью параметры, входящие в модель?

3. Как хорошо подобрана модель для данного процесса?

4. Какой результат необходимо получить – количественный или качественный?

2.2. Абсолютная и относительная погрешности. Форма записи данных

Разность между точным значением величины x и приближенным x^* называется погрешностью величины x:

$$\varepsilon = x - x^*. \qquad (3)$$

Обычно рассматривают абсолютную величину погрешности, которую измерить невозможно, так как неизвестно точное значение величины x и поэтому погрешность лишь оценивают по ее максимальному (предельному) значению, которое называют абсолютной погрешностью результата и обозначают следующим образом:

$$\left| x - x^* \right| \le \Delta_x$$

$$-\Delta_x < x - x^* < \Delta_x$$

$$x^* - \Delta_x \le x \le x^* + \Delta_x$$

Таким образом, мы имеем только приближенную оценку истинного числа x по недостатку $x^*–\Delta_x$ и по избытку $x^*+\Delta_x$ некоторой величины. Тогда точное значение этой величины можно оценить следующей записью:

$$x = x^* \ (\pm\ \Delta_x). \qquad (4)$$

Например, запись x=1,123±0,004 или 1,123±4·10^{-3} означает, что точное значение величины находится на отрезке [1,119; 1,127].

Замечание 1. Если x^* есть приближенное значение числа x, причем предельная абсолютная погрешность Δ_x равна ε, то говорят, что x^* есть приближенное значение числа x с точностью до ε.

Пример 1. Определить абсолютную погрешность числа x=3,16, взятого в качестве приближенного значения числа $\sqrt{10}$.

Известно, что $3,16<\sqrt{10}<3,17$. Значит, $|\sqrt{10}-3,16|<0,01$. Можно принять за абсолютную погрешность $\Delta_x = 0,01$. Если же учесть, что $3,16 < \sqrt{10} < 3,16228$, то получим лучшую оценку: $\Delta_x = 0,00228$. Заменяем это число большим, но более простым по записи, получаем: $\Delta_x = 0,003$.

Замечание 2. На практике пользуются преимущественно предельной абсолютной погрешностью. Для краткости речи в тех случаях, когда это не вызывает недоразумений, вместо «предельная абсолютная погрешность» говорят просто «абсолютная погрешность».

Замечание 3. Слово «погрешность» употребляется, когда идет речь об арифметических действиях над числами. Когда говорят об измерениях, вместо слова «погрешность» употребляют слово «ошибка». Обращаем внимание на то, что в обыденной речи под ошибкой понимают неверный результат. В практике вычислений неверный результат выражают словом «просчет».

Абсолютная погрешность недостаточно оценивает величину с точки зрения ее весомости.

Например, если измеряется расстояние между двумя городами с точностью до одного километра, то такая точность вполне достаточна для такого измерения, в то же время при измерении расстояния между двумя домами одной улицы такая точность будет недопустимой. Следовательно, точность приближённого значения величины зависит не только от величины абсолютной погрешности, но и от значения измеряемой величины.

Поэтому мерой точности величин служит её относительная погрешность.

Относительной погрешностью приближенной величины x^* называется отношение

$$\delta_x = \frac{\Delta_{x^*}}{|x^*|}. \qquad (5)$$

Иногда относительную погрешность выражают в процентах:

$$\delta_x = \frac{\Delta_{x^*}}{|x^*|} \cdot 100\%. \qquad (6)$$

Так, например, для значения 100 ±0,1 относительная погрешность

$$\delta_x = \frac{0,1}{100} \cdot 100\% = 0,1\%,$$

а для значения с той же абсолютной погрешностью 0,5±0,1

$$\delta_x = \frac{0,1}{0,5} \cdot 100\% = 20\%.$$

В этом примере хорошо виден «вес» ошибки в каждом измерении: в первом случае это 0,1 %, а во втором – 20%.

Пример 2. $\sqrt{10} \approx 3,16$. Полагая Δ_x = 0,00228, можем принять $\delta_x = \frac{0,00228}{3,16}$. Производя деление и округляя (обязательно в сторону увеличения), получим δ_a= 0,0008 = 0,08% .

Информация о том, что величина x^* является приближённой для некоторой точной величины x с относительной погрешностью $\delta(x^*)$, записывается в виде $x = x^* \cdot (1 \pm \delta(x))$.

Например, записи x = 1,123 (1 ± 0,003), x = 1,123 (1 ± $3 \cdot 10^{-3}$), x = 1,123 (1 ± 0,3 %) означают, что точная величина x удовлетворяет неравенству $1,123 \cdot (1 - 0,003) \le x \le 1,123 \cdot (1 + 0,003)$.

Учитывая вышесказанное, можно установить связь между абсолютной и относительной погрешностью:

$$\Delta(x^*) = |x^*| \cdot \delta(x). \qquad (7)$$

Зачастую формулы (5, 7) приходится применять тогда, когда мы ещё не знаем приближённой величины с требуемой точностью, а знаем лишь грубое её значение.

Пример 3. Требуется измерить длину предмета с относительной погрешностью не выше 0,1%. Возможно ли измерить длину с нужной точностью при помощи штангенциркуля, допускающего при этом абсолютную погрешностью до 0,1 мм?

Пусть мы ещё не измеряли предмет, но знаем, что грубое значение длины – около 12 см. Тогда по формуле мы можем найти абсолютную погрешность: $\Delta(x) = 120 \cdot 0,001 = 0,12$ мм $> 0,1$мм. Таким образом, мы можем сказать, что при помощи штангенциркуля можно произвести измерение с заданной точностью.

Абсолютную и относительную погрешности обычно записывают в виде числа, содержащего одну или две значащие цифры.

Значащими цифрами числа называются все цифры в его записи, начиная с первой слева, отличной от нуля.

Пример 4. У чисел $x^*=0{,}0\underline{3045}$ и $x^*=0{,}0\underline{3045000}$ значащими цифрами являются подчёркнутые цифры. Число значащих цифр в первом случае равно 4, во втором – 7.

Значащую цифру называют *верной*, если абсолютная погрешность числа не превосходит половины единицы разряда, соответствующей этой цифре, иначе она называется сомнительной.

Пример 5. Рассмотрим приближённое число x^*=0,03045. Если известно, что его абсолютная погрешность $\Delta(x) = 0,000003$, то можем сказать, что число x^* записано со всеми верными цифрами. В случае же если абсолютная погрешность $\Delta(x) = 0,0000051$, можем сказать, что в записи числа сомнительной является цифра 5.

За правило примем следующее.

1. При десятичной записи приближённой величины следует писать только верные цифры. В таком случае по записи числа можно определить предельную абсолютную погрешность.

Пример 6. Даны приближённые числа, записанные только с верными цифрами: 3,8; 0,0283; 4260. По записи этих чисел можно сказать, что погрешности этих чисел равны соответственно 0,05; 0,00005; 0,5.

2. Если величина записана с некоторым числом десятичных знаков после запятой, причём последние десятичные знаки есть нули, являющиеся верными цифрами, то их не следует отбрасывать при записи числа.

Пример 7. Если абсолютная погрешность числа 3,2 равна 0,0005, то вместо 3,2 следует писать 3,200.

2. Если известно, что число точное, то в дробных разрядах его десятичной записи нули справа отбрасываются.

2.3. Представление чисел в ЭВМ. Погрешность округления

Число в ЭВМ может быть представлено двумя формами записи: с фиксированной и плавающей запятой.

С фиксированной запятой называют запись

$x = \pm\, a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0,\, a_{-1}\, a_{-2} \ldots a_{-n} = \pm\, a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p^1 + a_0 p^0 +$
$+\ \ldots\ + a_{-1}p^{-1} + a_{-2}p^{-2} + \ldots + a_{-n}p^{-n}$. (8)

Например: $234{,}305 = 2\cdot10^2 + 3\cdot10^1 + 4\cdot10^0 + 3\cdot 10^{-1} + 0\cdot 10^{-2} + 5\cdot 10^{-3}$.

С плавающей точкой в нормализованном виде число представляется следующим образом

$$x = \pm a\cdot p^{b}, \tag{9}$$

где $1 \le a < p,\ b \in Z$;

p – основание системы счисления (для десятичной системы p=10);

a – мантисса числа x, записывается в форме числа с фиксированной запятой;

b – порядок числа x.

Н а п р и м е р: $234{,}305 = 2{,}34305 \cdot 10^2$.

Округлением числа *x* до *s* разрядов называют запись данного числа таким числом x_s^*, у которого все разряды начиная с $s-1$ нулевые.

Погрешностью округления называют разность $\left| x - x_s^* \right|$.

Способы округления.

Пусть $x = a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0,\, a_{-1}\, a_{-2} \ldots a_{-n}$.

Первый способ округления.

$$x_s = a_n\, a_{n-1} \ldots a_0,\, a_{-1} \ldots a_{s-n} \ldots a_{s+1} a_s\, 000\ldots \tag{10}$$

Погрешность в этом случае равна

$$\Delta_s = \left| x - x_s \right| = \left| 0{,}0_{\ldots}0a_{s-1}a_{s-2}\ldots \right| \le p\ . \tag{11}$$

Второй способ округления.

$$x_s^* = \begin{cases} x_s, & \left| x - x_s \right| < \dfrac{1}{2} p^s \\ x_s + p^s, & \left| x - x_s \right| \ge \dfrac{1}{2} \cdot p^s \end{cases} \tag{12}$$

В этом случае погрешность не превышает половины округлённого разряда:

$$\left| x - x_s^* \right| \le \frac{1}{2} p^s. \tag{13}$$

Пусть приближенное число еще и округляется. Очевидно, что на погрешность измерения будет накладываться погрешность округления.

Если ввести обозначения: x – точное число, x^* – приближенное, x_s^* – после округления.

Тогда после округления абсолютная погрешность будет выглядеть следующим образом:

$$\left|x-x_s^*\right|=\left|x-x^*+x^*-x_s^*\right|\le\left|x-x^*\right|+\left|x^*-x_s^*\right|. \qquad (14)$$

Таким образом, абсолютная погрешность числа с учётом его округления не превосходит суммы погрешности числа x и погрешности округления.

Пример . Округляя приближенное число x^* = 13,73 до десятых, получим x_{-1}^*=13,7. Тогда Δ_x= 0,005 + |13,7 – 13,73| = 0,005 + 0,03 = 0,035. В округлённом числе все цифры верные. Поэтому в окончательном ответе мы запишем x^* = 13,7.

С другой стороны, округляя число x^* = 5,45 до десятых, получим x_{-1}^*= 5,5. В данном случае Δ_x =0,005 + 0,05 = 0,055 > $\frac{1}{2}$ 10^{-1}. Верной будет только цифра 5, которая и пойдёт в ответ.

2.4. Взаимосвязь числа верных цифр в записи числа и относительной погрешности

По числу верных десятичных знаков в записи числа можно судить об абсолютной погрешности. Можно показать, что этих сведений достаточно для того, чтобы судить и об относительной погрешности.

П р и м е р. Пусть дана приближенная величина x^* = 246, записанная со всеми верными цифрами, т. е. Δ_{x^*}= 0,5.

Тогда $\delta_{x^*}=\dfrac{0,5}{246}=\dfrac{1}{2\cdot 246}=0,0021.$

Возьмем число x^* = 2,46, Δ_{x^*} = 0,005. Получаем

$$\delta_{x^*}=\frac{0,005}{2,46}=\frac{1}{2\cdot 246}=0,0021.$$

Вывод. Относительная погрешность приближенного числа определяется набором и порядком расположения верных значащих цифр в записи числа и не зависит от положения запятой.

Правило вычисления относительной погрешности. Пусть в записи приближенного числа все цифры верны. Предельную относительную погрешность можно принять равной дроби, числитель которой равен 1, а знаменатель есть удвоенное целое число, написанное при помощи всех значащих цифр данного числа с сохранением порядка их записи.

Замечание 1. Данным правилом пользуются для промежуточных вычислений, так как оно позволяет оценить результат, оставив в нём одну сомнительную цифру.

Замечание 2. Главную роль при вычислении предельной относительной погрешности по указанному правилу играет первая из значащих цифр, остальные можно заменить нулями.

На основании замечания 2 можно привести данные о зависимости относительной погрешности от числа значащих цифр с учетом первой значащей цифры (табл. 1).

Таблица 1. **Относительная погрешность в зависимости от первой значащей цифры и числа верных значащих цифр, %**

Число верных значащих цифр	Первая значащая цифра								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	50	25	17	13	10	9	8	7	6
2	5	3,0	2	1,3	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6
3	0,5	0,3	0,2	0,13	0,1	0,09	0,08	0,07	0,06

Замечание 3. Если приближенное число написано с плавающей запятой, то относительная погрешность определяется набором верных значащих цифр в записи числа x. Так, числа $0{,}24 \cdot 10^{-4}$; $2{,}4 \cdot 10^{-3}$; $0{,}024 \cdot 10^{-5}$ имеют одну и ту же относительную погрешность.

Отыскание числа значащих цифр по заданной относительной погрешности. Можно решить и обратную задачу – отыскание числа значащих цифр по заданной относительной погрешности.

Пусть требуется найти приближенное значение некоторой величины так, чтобы относительная погрешность не превышала значения δ.

Если никаких других сведений нет, то обычно рассуждают так: по правилу вычисления относительной погрешности можем записать

$$\frac{1}{2 \cdot x} \leq \delta. \qquad (14)$$

Тогда остаётся подобрать наименьшее количество значащих цифр в записи числа, чтобы выполнялось данное неравенство.

Пример. Найти сторону квадрата, площадь которого S = 32,4дм^2, так, чтобы относительная погрешность не превысила 9 %.

$$a = \sqrt{39,4} = 6,276942...$$

Округлим полученный результат так, чтобы обеспечить требуемую точность. Подберём такое целое число *x*, чтобы

$$\frac{1}{2\cdot x} \le 0,09.$$

Нетрудно заметить, что уже при одной значащей цифре в записи числа это неравенство выполняется. Таким образом, сторона квадрата будет равна 6 ± 0,3 дм.

2.5. Основные арифметические действия над приближёнными величинами

При выполнении действий над приближёнными числами мы получаем также приближённое число. Возникает вопрос, как оценить погрешности арифметических действий над приближёнными числами?

Сложение и вычитание приближённых чисел. Абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких приближённых величин равна сумме абсолютных погрешностей слагаемых:

$$\Delta_{x_1^* \pm x_2^*} = \Delta_{x_1^*} + \Delta_{x_2^*}. \quad (15)$$

Зная абсолютную погрешность суммы и разности приближённых величин и грубый результат алгебраического сложения, можно перейти к относительной погрешности результата.

Пример 1. $x_1 = 25{,}74(\pm 0{,}02)$; $x_2 = 96{,}42(\pm 0{,}03)$; $x_1 + x_2 = 122{,}16(\pm 0{,}05)$.

Пример 2. Записать результат действий $u = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9$ с учётом их погрешностей, если $x_1 = 27{,}35$; $x_2 = 181{,}17$; $x_3 = 1{,}15$; $x_4 = 0{,}18$; $x_5 = 33{,}84$; $x_6 = 19{,}85$; $x_7 = 45{,}76$; $x_8 = 53{,}74$; $x_9 = 165{,}61$ приближённые числа.

Вычисляя сумму, получим $u = 27{,}35 + 181{,}17 + 1{,}15 + 0{,}18 + 33{,}84 + 19{,}85 + 45{,}76 + 53{,}74 + 165{,}61 = 528{,}65$.

$$\Delta_{x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9} = 0{,}005 + 0{,}005 + \ldots + 0{,}005 = 9\cdot 0{,}005 = 0{,}045.$$

Так как $\Delta_{x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9} = 0{,}045 < 0{,}05$, то цифра, записанная в разряде сотых, – сомнительна, поэтому производим округление до десятых: u=528,7, $\Delta_u = \Delta_{x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9} + \Delta_{u_{-1}} = 0{,}045 + 0{,}05 = 0{,}095 < 0{,}5$. Это означает, что цифра, записанная в разряде десятых с учётом округления, сомнительная и результат необходимо округлить до единиц. Округляя и учитывая ошибку округления, записываем результат только с верными значащими цифрами: u≈529(±0,4).

Умножение и деление приближённых чисел. Относительная погрешность произведения нескольких приближённых величин равна сумме относительных погрешностей сомножителей:

$$\delta_{x_1^* \cdot x_2^*} = \delta_{x_1^*} + \delta_{x_2^*}. \tag{16}$$

Относительная погрешность частного от деления двух приближённых величин равна сумме относительных погрешностей делимого и делителя:

$$\delta_{x_1^* / x_2^*} = \delta_{x_1^*} + \delta_{x_2^*}. \tag{17}$$

Зная грубый результат произведения и частного величин и относительную погрешность результата этих операций, всегда можно оценить абсолютную погрешность результата.

Пример 3. Найдем относительную погрешность произведения двух приближенных чисел: a = 6,32; b = 0,783.

Из записи чисел определяем Δ_a=0,005, Δ_b=0,0005. Следовательно, δ_a=0,0008; δ_b=0,0007. Это значит, что $\delta_{ab} = \delta_a + \delta_b$=0,0015.

П р и м е р 4. Найти приближенное значение величины u=$\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}$, если $\sqrt{3}$ и π вычислены приближенно с четырьмя верными значащими цифрами.

Итак, $\sqrt{3}$≈1,732; π≈3,142. Из записи чисел определяем: $\delta_{\sqrt{3}}$=0,0003; δ_π = 0,0002. Значит, δ_u = 0,0005. Пользуясь полученными результатами, можем определить, сколько верных цифр будет в десятичной записи искомого числа u. Найдя грубое приближенное значение числа u (u≈0,6) и учитывая, что δ_u = 0,0005, определяем Δ_u = 0,0003. Это значит, что в записи результата верны три значащие цифры. Производя деление числа 1,732 на число 3,142 и сохраняя в частном только три значащие цифры, получим:

$$\frac{\sqrt{3}}{\pi} \approx 0{,}551.$$

На практике очень часто приходится оценивать погрешность числового значения величины, полученной в результате вычислений по формуле, которая содержит не одно, а несколько действий. В таких случаях для оценки погрешности последовательно применяют теоремы о погрешностях. Поясним это на примерах.

Пример 5. Вычислить $u = \dfrac{a \cdot b}{c + d}$, где a = 5,64; b =7,26; c = 2,33; d = 1,64.

В данной задаче необходимо произвести ряд действий. Согласно приведенным выше правилам вычисления погрешностей видно, что при сложении легко определяется абсолютная погрешность, а при умножении и делении – относительная погрешность. Поэтому при оценке погрешности результата необходимо переходить от одного вида погрешности к другому.

Найдем $\Delta_{c+d} = \Delta_c + \Delta_d$=0,005 + 0,005 = 0,01. Для дальнейших вычислений найдём относительную погрешность знаменателя. Грубое приближенное значение знаменателя примем равным 4. Тогда $\Delta_{c+d} = \dfrac{0,01}{4}$ = 0,0025 = 0,25 %.

Из записи чисел видно, что δ_a = 0,1%, δ_b = 0,08%. Теперь можем найти относительную погрешность результата $\delta_u = \delta_a + \delta_b + \delta_{c+d}$ = = 0,1 % + 0,08 % + 0,25 % = 0,43 %. Найдем грубое приближенное значение результата: $u \approx 10$. Очевидно, что Δ_u = 0,043. Это значит, что результат будет иметь три верных значащих цифры. Производя вычисления и сохраняя лишь три значащие цифры, получим $u \approx 10,3$.

2.6. Приближённые вычисления без учёта погрешностей

При выполнении арифметических действий над приближенными числами в тех случаях, когда не требуется строгого учета точности, установлены правила, позволяющие быстро, без громоздких исследований определить, как нужно проводить вычисления, чтобы получить результат нужной точности. Эти правила не столь точны, как правила вычислений со строгим учетом погрешностей, но во многих вычислениях вполне достаточны. Они называются *правилами верных цифр*. При формулировке этих правил будем считать, что число данных чисел невелико.

Для того чтобы вычислить алгебраическую сумму приближенных слагаемых, нужно:

– среди слагаемых выбрать наименее точное (имеет наименьшее число разрядов после запятой);

– все остальные слагаемые округлить, сохраняя один запасной разряд, следующий за последним разрядом выделенного слагаемого;

– сложить полученные после округления числа;

– округлить полученный результат до предпоследнего разряда.

Пример 1. $S = 2{,}737 + 0{,}77974 + 27{,}1 + 0{,}283 \approx 2{,}74 + 0{,}78 + 27{,}1 + 0{,}28 \approx 30{,}90 \approx 30{,}9$.

Для того чтобы вычислить произведение (частное) приближенных чисел, нужно:

– выделить сомножитель (делимое / делитель), содержащий наименьшее число значащих цифр;

– округлить остальные сомножители (делимое/делитель), оставляя на одну значащую цифру больше, чем в выделенном сомножителе;

– произвести умножение (деление);

– округлить полученный результат, сохраняя столько значащих цифр, сколько их в выделенном сомножителе (делимом/делителе).

Пример 2. $P = 3{,}34 \cdot 0{,}7 \cdot 4{,}748 = 3{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 4{,}7 \approx 10{,}857 \approx 1 \cdot 10^1$.

При возведении приближенного значения в квадрат или куб, при извлечении квадратного или кубического корня в результате следует оставлять столько значащих цифр, сколько их имеет основание.

Замечание. Если число является результатом промежуточных действий, то следует сохранить в нем на 1 цифру больше, чем в вышеуказанных правилах.

2.7. Прямая задача теории погрешности. Погрешность вычисления значения функции одной переменной

В теории приближенных вычислений рассматриваются две основные задачи: прямая и обратная.

Постановка прямой задачи теории погрешности. Необходимо оценить погрешность результата указанных действий над приближенными числами (например, произвести вычисления по данной формуле), если заданы предельные погрешности этих чисел.

Прямая задача теории погрешности решается на основании определения производной функции одной переменной. Вспомним, что производная функции определяется по формуле

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x},$$

где Δx – приращение аргумента;

Δf – приращение функции.

Пусть x – точное значение аргумента функции, $x^* = x + \Delta x$ – приближенное его значение, Δx – абсолютная погрешность аргумента функции.

Тогда под $f(x)$ будем понимать точное значение функции, $f(x^*)$ – значение функции, вычисленное с погрешностью, $\Delta f(x)$ – погрешность вычисления функции.

Из определения производной и теоремы о пределах можно записать

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \approx f'(x) \quad \text{(для малых } \Delta x\text{)}.$$

Из последней формулы следует $\Delta f(x) \approx f'(x^*) \cdot \Delta x$ или применительно к погрешностям без учета знака

$$\Delta f(x) \approx \left| f'(x^*) \right| \cdot \Delta x. \tag{18}$$

Относительная погрешность функции вычисляется по формуле

$$\delta_f = \frac{\Delta f}{|f|}. \tag{19}$$

Приведенные выше формулы дают возможность оценить погрешность значения произвольной функции в Δ – окрестности некоторой точки x из её области определения.

На основании данных формул можно вычислить погрешности некоторых элементарных функций.

1. *Относительная погрешность степенной функции.* Пусть $f(x)=x^n$. Тогда $f'(x) = n \cdot x^{n-1} = \dfrac{n \cdot x^n}{x}$. Абсолютная погрешность вычисления степенной функции может быть записана в виде $\Delta f = \left| f'(x) \right| \cdot \Delta x = \left| \dfrac{n \cdot x^n}{x} \right| \cdot \Delta x = n \cdot \left| \dfrac{x^n}{x} \right| \cdot \Delta x$, а относительную погрешность можно вычислить по следующему правилу:

$$\delta_f = \frac{\Delta f}{|f|} = n \cdot \left| \frac{x^n}{x \cdot x^n} \right| \cdot \Delta x = n \cdot \frac{\Delta x}{|x|} = n \cdot \delta_x .$$

Таким образом, относительная погрешность степенной функции равна произведению степени этой функции на относительную погрешность её аргумента.

2. *Относительная погрешность логарифмической функции.* Пусть $f(x) = \log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$ $(x > 0)$, для неё производная равна $f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln(a)}$. Пользуясь формулой, можем записать следующее выражение: $\Delta f = |f'(x)| \cdot \Delta x = \dfrac{\Delta x}{|x \cdot \ln(a)|} = \left|\dfrac{1}{\ln(a)}\right| \cdot \delta_x$. Относительная погрешность $\delta_f = \dfrac{\delta_x}{|\ln(x)|}$.

Пример. Определить куб числа 2,33. Результат записать только с верными цифрами.

$$2{,}33^3 = 12{,}6493;$$

$$\Delta x = 0{,}005;\ \delta_x = \frac{0{,}005}{2{,}33} = 0{,}0022;$$

$\delta_f = 0{,}022 \cdot 3 = 0{,}066 = 6{,}6\%$, а абсолютная погрешность результата $\Delta_f = \delta_f \cdot |x^3| = 0{,}066 \cdot 12{,}65 = 0{,}084$. Таким образом, по определению верными цифрами результата являются первые две. Поэтому результат запишется в виде $13 \pm 0{,}5$.

Формулы для вычисления погрешностей основных элементарных функций приведены в табл. 2.

Таблица 2. **Правила вычисления основных элементарных формул**

Функция	Предельная абсолютная погрешность	Предельная относительная погрешность
1	2	3
1. $y = x^n$	$\Delta_y = \lvert n\rvert \cdot \lvert x\rvert^{n-1} \cdot \Delta_x$	$\delta_y = \lvert n\rvert \cdot \delta_x$
2. $y = a^x$	$\Delta_y = a^x \cdot \lvert\ln a\rvert \cdot \Delta_x$	$\delta_y = \lvert\ln a\rvert \cdot \Delta_x$
3. $y = \lg x$	$\Delta_y = \dfrac{M}{\lvert x\rvert}\Delta_x = M \cdot \delta_x$ $M = \lg(e) = 0{,}43429...$	$\delta_y = \dfrac{M}{\lvert\lg x\rvert} \cdot \delta_x$
4. $y = \sin x$	$\Delta_y = \lvert\cos x\rvert \cdot \Delta_x$	$\delta_y = \lvert\mathrm{ctg}\, x\rvert \cdot \Delta_x$

Окончание табл. 2

1	2	3
5. $y = \cos x$	$\Delta_y = \lvert\sin x\rvert \cdot \Delta_x$	$\delta_y = \lvert\operatorname{tg} x\rvert \cdot \Delta_x$
6. $y = \operatorname{tg} x$	$\Delta_y = \dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot \Delta_x$	$\delta_y = \dfrac{2}{\lvert\sin 2x\rvert} \cdot \Delta_x$
7. $y = \operatorname{ctg} x$	$\Delta_y = \dfrac{1}{\sin^2 x} \cdot \Delta_x$	$\delta_y = \dfrac{2}{\lvert\sin 2x\rvert} \cdot \Delta_x$
8. $\begin{cases} y = \arcsin x \\ y = \arccos x \end{cases}$	$\Delta_y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \Delta_x$	$\delta_y = \dfrac{x}{y\sqrt{1-x^2}} \cdot \delta_x$
9. $\begin{cases} y = \operatorname{arctg} x \\ y = \operatorname{arcctg} x \end{cases}$	$\Delta_y = \dfrac{1}{1+x^2} \cdot \Delta_x$	$\delta_y = \dfrac{x}{y(1+x^2)} \cdot \delta_x$
10. $y = u \cdot v$	$\Delta_y = \lvert u\rvert \cdot \Delta_v + \lvert v\rvert \cdot \Delta_u$	$\delta_y = \delta_u + \delta_v$
11. $y = u \cdot v \cdot w$	$\Delta_y = \lvert v \cdot w\rvert \cdot \Delta_u + \lvert u \cdot w\rvert \cdot \Delta_v +$ $+ \lvert u \cdot v\rvert \cdot \Delta_w$	$\delta_y = \delta_u + \delta_v + \delta_w$
12. $y = \dfrac{u}{v}$	$\Delta_y = \dfrac{\lvert v\rvert \cdot \Delta_u + \lvert u\rvert \cdot \Delta_v}{v^2}$	$\delta_y = \delta_u + \delta_v$

2.8. Обратная задача теории погрешности

Постановка обратной задачи теории погрешности. Необходимо установить допустимые погрешности приближенных чисел при выполнении указанных действий, чтобы полученный результат имел наперед заданную предельную погрешность.

Пусть $y = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ определена и непрерывно-дифференцируема в области D и точка $X\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \in D$.

Какими должны быть погрешности ε_{x_i} приближенных величин x^*_i для аргументов x_i, чтобы погрешность результата вычисления функции не превышала по модулю $\varepsilon_{\tilde{y}}$?

Погрешность вычисления функции, зависящей от нескольких аргументов, связана следующим соотношением:

$$\left|\Delta\tilde{y}\right| \le \sum_{i=1}^{n}\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_X\right|\varepsilon_{x_i} \le \varepsilon_{\tilde{y}} ,$$

в котором заведомо известным является погрешность результата $-\varepsilon_{\tilde{y}}$, требуется найти погрешности аргументов $-\varepsilon_{x_i}$.

В общем случае поставленная задача не имеет решения. Она может быть решена только при некоторых допущениях.

1. Если неизвестна погрешность лишь одного аргумента. Тогда погрешность i-го аргумента можно определить по формуле

$$\varepsilon_{x^*_i} \le \frac{\varepsilon_{\tilde{y}} - \sum_{j=1}^{i-1}\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_X\right|\varepsilon_{x^*_j} - \sum_{j=i+1}^{n}\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_X\right|\varepsilon_{x^*_j}}{\frac{\partial f}{\partial x_i}}. \tag{20}$$

2. Если погрешности всех аргументов вносят одинаковые доли в погрешности функции, т.е. частные дифференциалы равны между собой по модулю

$$\varepsilon_{x^*_i} \le \frac{\varepsilon_{\tilde{y}}}{n\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_X\right|},\ i = \overline{1,n} . \tag{21}$$

3. Если погрешности всех аргументов равны $(\varepsilon_{x^*_1} = \varepsilon_{x^*_2} = \ldots = \varepsilon_{x^*_n} = \varepsilon)$, тогда

$$\varepsilon \le \frac{\varepsilon_{\tilde{y}}}{\sum_{i=1}^{n}\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_X\right|}. \tag{22}$$

Пример. Требуется вычислить объем конуса по формуле $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$ так, чтобы относительная погрешность не превышала 0,1%. С какой точностью следует измерить радиус основания и высоту, чтобы обеспечить требуемую точность результата?

Для решения задачи следует знать грубые приближенные значения R и H. Пусть $R \approx 30$ см; $H \approx 80$ см. Найдем также грубое приближенное значение объема: $V \approx 75400$ см^3. На основании правил вычисления погрешности арифметических действий приближенных чисел составляем уравнение $\delta_\pi + 2\,\delta_R + \delta_H = 0{,}001$.

Число π мы можем взять с любой степенью точности, т. е. δ_π можно взять сколь угодно малым. Положим пока, $\pi = 3{,}142$, т. е. $\delta_\pi = 0{,}00016$. Тогда уравнение примет следующий вид: $2\delta_R + \delta_H = 0{,}00084$.

В этом уравнении два неизвестных: δ_R и δ_H. Значит, уравнение имеет бесконечное множество решений, задача оказывается неопределенной. Но мы можем наложить на δ_R и δ_H. некоторые дополнительные условия. Например, мы можем считать, что измерения R и H будут проведены при одинаковой точности измерительных инструментов. Тогда, можно положить $\Delta_R = \Delta_H$. Так как $\delta_R = \dfrac{\Delta_R}{30}$, $\delta_H = \dfrac{\Delta_H}{80}$, то будем иметь $\dfrac{19}{240}\Delta_R = 0{,}00084$. Отсюда $\Delta_R = \Delta_H = 0{,}0106$ см $= 0{,}106$ мм. Значит, для получения требуемой точности достаточно произвести измерения R и H с погрешностью, не превышающей 0,1 мм.

Вопросы для самопроверки

1. Каковы причины возникновения погрешностей?
2. Классификация погрешностей. Проиллюстрировать их смысл на примерах.
3. Каков вид полной погрешности результата вычислений?
4. В чём необходимость изучения неустранимой погрешности?
5. Что понимается под абсолютной погрешностью?
6. В чём заключается необходимость ввода относительной погрешности?
7. Какой вид имеет формула, связывающая относительную и абсолютную погрешности?
8. Как можно оценить точное значение рассматриваемой величины через её приближённое значение и абсолютную погрешность (относительную погрешность)?
9. Какая цифра в записи числа называется значащей?
10. Какая цифра в записи числа называется верной?
11. Какие способы записи чисел вам известны?
12. Какие способы округления чисел вы знаете?
13. Какой вид имеет формула для оценки абсолютной погрешности приближённой величины после округления её до s разрядов?
14. Существует ли взаимосвязь между числом верных цифр в записи числа и его погрешностями? Выпишите математические выражения этих взаимосвязей. Поясните их на примерах.
15. Как можно определить относительную погрешность числа, зная количество и набор верных цифр в его записи?

16. Как можно определить предельную относительную погрешность числа, зная количество и первую верную цифру в его записи?

17. Чему равна абсолютная погрешность суммы и разности приближённых чисел?

18. Чему равна относительная погрешность произведения и частного приближённых чисел?

19. Что такое правила “верных цифр”? Сформулируйте их.

20. Сформулируйте прямую задачу теории погрешности. Как она решается?

Сформулируйте обратную задачу теории погрешности. Что можно сказать о её решении?

4. ЗАДАНИЯ, РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

1. Определить значащие цифры в записи чисел: 0,256; 0,003592; 0,230; 39,45000; $0{,}236\cdot10^{2}$; $2{,}136\cdot10^{3}$.

2. Определить относительную погрешность приближенных чисел по их абсолютным погрешностям: а) 62,353(±0,002); б) 1,162(±0,05).

3. Определить абсолютную погрешность приближенных чисел по их относительным погрешностям: а) 12,373(1±0,0005); б) 0,162, δ=0,05%.

4. Определить, какое равенство подсчитано точнее:

а) 9/11 = 0,818 или $\sqrt{18} = 4{,}24$;

б) $7/22 = 0{,}318$ или $\sqrt{13} = 3{,}60$.

5. Найти предельные абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры:

а) 0,235; б) 32,412; в) $2{,}34\cdot10^{-3}$.

6. Записать числа в нормализованной форме: a = 374,12; b = 0,000286; c = 240000.

7. Следующие числа записать с фиксированной запятой: $a = 2{,}3\cdot10^{-6}$; $b = 0{,}374\cdot10^{3}$; $c = 0{,}83\cdot10^{-8}$.

8. Определить количество верных цифр в числе, если известна его относительная погрешность: а) a = 23,45674, δ = 0,002; б) b = 41,12, δ = 3%.

9. Округлить сомнительные цифры числа, оставив в его записи только верные цифры: а) 72,353(±0,026); б) 32,7486±0,012; в) 2,8867; $\delta = 0{,}43\%$, г) 2,3544, δ= 0,002.

10. Найти предельную абсолютную и относительную погрешности числа 6,395, если оно имеет в своей записи только верные цифры.

11. Округляя следующие числа до двух значащих цифр, определить абсолютную и относительную погрешности полученных чисел:

а) 5,3901, если это точное число;

б) 30,718 (±0,0006);

в) 1,4523 (1±0,01).

12. Вычислить значения выражения $\sqrt{x}$ от точного числа x = 2,564 и округлить его так, чтобы относительная погрешность полученного приближенного числа не превышала δ = 2 %.

13. Вычислить значения выражения $\sqrt[4]{\pi}$, взяв в качестве π = 3,14 и округлить его так, чтобы относительная погрешность полученного приближенного числа не превышала δ = 5 %.

14. Приближенное число a содержит 5 верных цифр. Что можно сказать об относительной погрешности числа a, если первая значащая цифра в его записи: а) 1, б) 4, в) 6, г) 2?

15. С какой предельной относительной погрешностью нужно найти приближенное значение числа a, чтобы верными оказались 5 значащих цифр, если известно, что первая значащая цифра в записи числа равна 3?

16. Для приближенных чисел a и b ($a > b > 0$) известно, что $\delta(a) = \delta(b) = = \delta$. Оценить погрешности: а) $\delta(a + b)$, б) $\delta(a - b)$, в) $\delta(a \cdot b)$, г) $\delta(a / b)$.

17. Числа a, b заданы приближенно: $a = 2,358$, $b = 0,163$, $\Delta a = \Delta b = 0,01$. Оценить погрешности: а) разности $c = a - b$, b) произведения $d = a \cdot b$. Записать ответ с учетом верных цифр.

18. Определить абсолютную и относительную погрешность вычислений а) $y = x^a$; б) $y = a^x, a > 0$; в) $y = e^x$, если a = 2, x = 3,123.

19. Функция $y = \dfrac{x_1^2 - 2x_2}{\sqrt{x_3}}$ вычисляется при значениях $x_1 = 2,5(\pm 0,1)$, $x_2 = 1,0(\pm 0,15)$, $x_3 = 1,7(\pm 0,03)$.

Найти значения y, Δ_y, δ_y. Записать результат со всеми верными цифрами.

20. Коэффициенты a, b, c вычисляются с относительной погрешностью $\delta(a) = \delta(b) = \delta(c) = \delta$. Найти максимальную погрешность, с которой могут вычисляться корни уравнений: а) $ax^2 + c = 0$, б) $ax^2 + bx = 0$.

21. Пользуясь правилом подсчёта верных цифр, вычислить

$$S = \frac{h^2}{18} : \frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2},$$

если а) a = 1,41, b = 3,156, h = 1,14;
б) a = 6,44, b = 5,323, h = 15,44.

22. Корни уравнения $x^2 - 2x + \lg 2 = 0$ нужно получить с четырьмя верными цифрами. С каким количеством верных цифр нужно взять свободный член уравнения?

23. Функция $y = \dfrac{\sqrt[3]{x_1} + x_2 \cdot x_3}{x_3^4}$ вычисляется при значениях $x_1 \approx 2,7$, $x_2 \approx -3,1$, $x_3 \approx 1,8$. Определить, при каких значениях δ_{x_1}, δ_{x_2}, δ_{x_3} ответ будет содержать 3 верные цифры, если известно, что

$$\text{а) } \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3}; \quad \text{б) } \Delta_{x_1} = \frac{1}{4}\Delta_{x_2} = \frac{1}{3}\Delta_{x_3}.$$

5. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задание 1.

1. Определить, какое равенство подсчитано точнее.
2. Округлить сомнительные цифры, оставив верные знаки, определить абсолютную погрешность результата.
3. Найти предельные абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры.

Вариант 1

1. $\sqrt{44} = 6,63$; $\dfrac{19}{41} = 0,463$.
2. а) $22,553(\pm 0,016)$;
   б) 2,8546; δ=0,3%.
3. а) 0,2387; б) 42,884.

Вариант 2

1. $\dfrac{7}{15} = 0,467$; $\sqrt{30} = 5,48$.
2. а) 17,2834; δ=0,3%;
   б) 6,4257 (±0,0024).
3. а) 3,751; б) 0,537.

Вариант 3

1. $\sqrt{10,5}=3,24;\ \frac{4}{17}=0,235.$
2. а) 34,834; δ=0,1%;
   б) 0,5748(±0,0034).
3. а) 11,445; б) 2,043.

Вариант 4

1. $\frac{5}{7}=0,714;\ \sqrt{10}=3,16.$
2. а) 2,3485 (±0,0042);
   б) 0,34484; δ=0,4%.
3. а) 2,3445; б) 0,745.

Вариант 5

1. $\frac{6}{7}=0,875;\ \sqrt{4,8}=2,19.$
2. а) 5,435 (±0,0028);
   б) 10,8441; δ=0,5%.
3. а) 8,345; б) 0,288.

Вариант 6

1. $\frac{12}{11}=1,091;\ \sqrt{6,8}=2,61.$
2. а) 8,24163 δ=0,2%;
   б) 0,12356; (±0,00036).
3. а) 12,45; б) 3,4553.

Вариант 7

1. $\frac{2}{21}=0,095;\ \sqrt{22}=4,69.$
2. а) 2,4543 (±0,0032);
   б) 24,5643; δ=0,1%.
3. а) 0,374; б) 4,348.

Вариант 8

1. $\frac{23}{15}=1,53;\ \sqrt{9,8}=3,13.$
2. а) 23,574 δ=0,2%;
   б) 8,3445; (±0,0022).
3. а) 20,43; б) 0,576.

Вариант 9

1. $\frac{6}{11}=0,545;\ \sqrt{83}=9,11.$
2. а) 21,68563 δ=0,3%;
   б) 3,7864; (±0,0041).
3. а) 41,72; б) 0,678.

Вариант 10

1. $\frac{17}{19}=0,889;\ \sqrt{52}=7,21.$
2. а) 13,537 (±0,0026);
   б) 7,521; δ=0,112%.
3. а) 5,434; б) 0,0748.

Вариант 11

1. $\frac{21}{29}=0,723;\ \sqrt{44}=6,63.$
2. а) 0,3567 δ=0,0042%;
   б) 13,6253; (±0,0021).
3. а) 18,357; б) 2,16.

Вариант 12

1. $\frac{50}{19}=2,63;\ \sqrt{27}=5,19.$
2. а) 1,784 (±0,0063);
   б) 0,85637; δ=0,21%.
3. а) 0,5746; б) 236,58.

Вариант 13

1. $\frac{13}{17}=0,764;\ \sqrt{31}=5,56.$
2. а) 3,6878 (±0,0013);
   б) 15,873; δ=0,42%.
3. а) 14,862; б) 8,73.

Вариант 14

1. $\frac{7}{22}=0,318;\ \sqrt{13}=3,60.$
2. а) 27,1548 (±0,0016);
   б) 0,3945; δ=0,16%.
3. а) 0,3648; б) 21,7.

Вариант 15

1. $\dfrac{17}{11}=1,545;\ \sqrt{18}=4,243.$
2. а) 0,8647 (±0,0013);
   б) 24,3618; δ=0,22%.
3. а) 2,4516; б) 0,863.

Вариант 16

1. $\dfrac{5}{3}=1,667;\ \sqrt{38}=6,16.$
2. а) 3,7542 δ=0,32%;
   б) 0,98351; (±0,00042).
3. а) 62,74; б) 0,389.

Задание 2.

1. Округляя следующие числа до трёх значащих цифр, определить абсолютную и относительную погрешности полученных приближенных чисел.

2. Определить абсолютную погрешность приближенных чисел по их относительным погрешностям.

3. Вычислить количество верных цифр в числе, если известна его абсолютная погрешность.

4. Определить количество верных цифр в числе, если известна его относительная погрешность.

5. Вычислить значение выражения и округлить его так, чтобы относительная погрешность результата не превышала заданного процента при условии, что аргумент выражения – точное число.

Вариант 1

1. 3, 2471.
2. 21,73; 1%.
3. $x=33,5178;\ \Delta_x=0,33\cdot10^{-2}$.
4. $x=53,5178;\ \delta_x=0,33\cdot10^{-2}$.
5. $\sqrt{55,3};\ 0,9\%$.

Вариант 2

1. 13, 52471.
2. 421,473; 1,2 %.
3. $x=23,178;\ \Delta_x=0,93\cdot10^{-2}$.
4. $x=732,457;\ \delta_x=0,33\cdot10^{-2}$.
5. $\sqrt{27,4};\ 1\%$.

Вариант 3

1. 0,24571.
2. 122,73; 1,5 %.
3. $x=3,517;\ \Delta_x=0,44\cdot10^{-1}$.
4. $x=153,5178;\ \delta_x=0,33\cdot10^{-3}$.
5. $\sqrt{9255,4};\ 1\%$.

Вариант 4

1. 3,2471.
2. 21,73; 1 %.
3. $x=33,5178;\ \Delta_x=0,33\cdot10^{-2}$.
4. $x=53,5178;\ \delta_x=0,33\cdot10^{-2}$.
5. $\sqrt{50,3};\ 1,4\%$.

Вариант 5

1. 5,4472.
2. 41,75; 1,2 %.
3. $x=238,5428;\ \Delta_x=0,38\cdot10^{-3}$.
4. $x=83,5378;\ \delta_x=0,33\cdot10^{-2}$.
5. $\sqrt{155,4};\ 1\%$.

Вариант 6

1. 31,347.
2. 28,69; 1,1 %.
3. $x=3,617;\ \Delta_x=0,38\cdot10^{-1}$.
4. $x=55,5178;\ \delta_x=0,30\cdot10^{-2}$.
5. $\sqrt{25,3};\ 0,8\%$.

Вариант 7

1. 22,471.
2. 72,73; 1,5 %.
3. $x = 89,5178$; $\Delta_x = 0,53 \cdot 10^{-2}$.
4. $x = 100,5178$; $\delta_x = 0,33 \cdot 10^{-2}$.
5. $\sqrt{73,3}$; $1,4\%$.

Вариант 8

1. 8,4471.
2. 41,72; 0,8 %.
3. $x = 29,5178$; $\Delta_x = 0,30 \cdot 10^{-2}$.
4. $x = 80,425$; $\delta_x = 0,23 \cdot 10^{-2}$.
5. $\sqrt{45,6}$; $1,2\%$.

Вариант 9

1. 13,3522.
2. 27,77; 1 %.
3. $x = 231,5178$; $\Delta_x = 0,43 \cdot 10^{-3}$.
4. $x = 44,4882$; $\delta_x = 0,35 \cdot 10^{-2}$.
5. $\sqrt{59,7}$; $1,1\%$.

Вариант 10

1. 473,8249.
2. 39,74; 1, 5%
3. $x = 39,1378$; $\Delta_x = 0,17 \cdot 10^{-2}$.
4. $x = 35,678$; $\delta_x = 0,42 \cdot 10^{-2}$.
5. $\sqrt{85,7}$; $0,9\%$.

Вариант 11

1. 81,441.
2. 21,73; 0,11 %.
3. $x = 251,4178$; $\Delta_x = 0,27 \cdot 10^{-3}$.
4. $x = 63,5132$; $\delta_x = 0,24 \cdot 10^{-2}$.
5. $\sqrt{62,3}$; 1%.

Вариант 12

1. 27,4751.
2. 21,73; 1,6 %.
3. $x = 33,5178$; $\Delta_x = 0,24 \cdot 10^{-2}$.
4. $x = 62,457$; $\delta_x = 0,37 \cdot 10^{-2}$.
5. $\sqrt{55,3}$; $1,1\%$.

Вариант 13

1. 73,2712.
2. 22,37; 2 %.
3. $x = 323,5178$; $\Delta_x = 0,32 \cdot 10^{-3}$.
4. $x = 58,4128$; $\delta_x = 0,13 \cdot 10^{-2}$.
5. $\sqrt{88,8}$; $1,7\%$.

Вариант 14

1. 8,4576.
2. 44,77; 2,2 %.
3. $x = 22,8755$; $\Delta_x = 0,91 \cdot 10^{-2}$.
4. $x = 28,5170$; $\delta_x = 0,40 \cdot 10^{-2}$.
5. $\sqrt{50,6}$; 1%.

Вариант 15

1. 30,4471.
2. 41,75; 2,1 %.
3. $x = 3,5178$; $\Delta_x = 0,73 \cdot 10^{-1}$.
4. $x = 58,5178$; $\delta_x = 0,47 \cdot 10^{-2}$.
5. $\sqrt{52,2}$; $0,8\%$.

Вариант 16

1. 99,5474.
2. 41,77; 1,8 %.
3. $x = 92,9184$; $\Delta_x = 0,36 \cdot 10^{-2}$.
4. $x = 66,7833$; $\delta_x = 0,20 \cdot 10^{-2}$.
5. $\sqrt{110}$; 1%.

Задание 3.

Вычислить значения функций при указанных значениях аргумента x. Определить абсолютную и относительную погрешности результата.

Вариант 1. $y = x^2 \sin(x)$ при $x = \sqrt{2}$, полагая $\sqrt{2} \approx 1,414$.

Вариант 2. $y = x \ln x$ при $x = \pi$, полагая $\pi \approx 3,142$.

Вариант 3. $y = e^x \cos(x)$ при $x = \sqrt{3}$, полагая $\sqrt{3} \approx 1,732$.

Вариант 4. $y = x^2 \cos(x)$ при $x = \sqrt{2}$, полагая $\sqrt{2} \approx 1,414$.

Вариант 5. $y = xe^x$ при $x = \pi$, полагая $\pi \approx 3,142$.

Вариант 6. $y = e^x \sin(x)$ при $x = \sqrt{3}$, полагая $\sqrt{3} \approx 1,732$.

Вариант 7. $y = x\sin(x)$ при $x = \sqrt{2}$, полагая $\sqrt{2} \approx 1,414$.

Вариант 8. $y = x^2 \ln x$ при $x = \pi$, полагая $\pi \approx 3,142$.

Вариант 9. $y = e^x \mathrm{tg}(x)$ при $x = \sqrt{3}$, полагая $\sqrt{3} \approx 1,732$.

Вариант 10. . $y = x^2 \mathrm{tg}(x)$ при $x = \sqrt{2}$, полагая $\sqrt{2} \approx 1,414$.

Вариант 11. $y = x^2 e^x$ при $x = \pi$, полагая $\pi \approx 3,142$.

Вариант 12. $y = e^x \mathrm{ctg}(x)$ при $x = \sqrt{3}$, полагая $\sqrt{3} \approx 1,732$.

Вариант 13. $y = e^x x^3$ при $x = \sqrt{3}$, полагая $\sqrt{3} \approx 1,732$.

Вариант 14. $y = x^3 tg(x)$ при $x = \sqrt{2}$, полагая $\sqrt{2} \approx 1,414$.

Вариант 15. $y = \sqrt{3} e^x$ при $x = \pi$, полагая $\pi \approx 3,142$.

Вариант 16. $y = e^x \mathrm{ctg}(x)$ при $x = \sqrt{3}$, полагая $\sqrt{3} \approx 1,732$.

Задание 4.

Вычислить значения функций при указанных значениях переменных. Определить абсолютную и относительную погрешность результата, считая: а) исходные данные точными числами; б) все знаки исходных данных верными. Записать результат с учетом погрешностей.

Вариант 1. $u = \ln(x_1 + x_2^2),\ x_1 = 0,97,\ x_2 = 1,132.$

Вариант 2. $u = (x_1 + x_2^2) \cdot x_3^2,\ x_1 = 3,28,\ x_2 = 0,932,\ x_3 = 1,132.$

Вариант 3. $u = x_1 x_2 + x_1 x_3,\ x_1 = 2,104,\ x_2 = 1,935,\ x_3 = 0,875.$

Вариант 4. $u = \ln\left(x_1^2 + x_2\right),\ x_1 = 0,39,\ x_2 = 1,213.$

Вариант 5. $u = \dfrac{x_1 x_2 + x_2^2}{x_3},\ x_1 = 2,98,\ x_2 = 0,879,\ x_3 = 0,982.$

Вариант 6. $u = x_1 x_2 + x_2 x_3,\ x_1 = 1,344,\ x_2 = 2,123,\ x_3 = 0,587.$

Вариант 7. $u = \ln\left(x_1^2 + x_2 x_1\right),\ x_1 = 0,97,\ x_2 = 1,132.$

Вариант 8. $u = \dfrac{x_3 + x_2^2}{x_1}, \; x_1 = 3,28, \; x_2 = 0,932, \; x_3 = 1,132.$

Вариант 9. $u = x_1^2 x_2 x_3, \; x_1 = 2,104, \; x_2 = 1,935, \; x_3 = 0,875.$

Вариант 10. $u = \ln\left(x_1^2 + x_2^2\right), \; x_1 = 0,87, \; x_2 = 1,567.$

Вариант 11. $u = \dfrac{x_2 + x_1^2}{x_3}, \; x_1 = 1,28, \; x_2 = 0,993, \; x_3 = 1,434.$

Вариант 12. $u = x_1^2 x_2 + x_2 x_3 + x_3, \; x_1 = 2,394, \; x_2 = 2,115, \; x_3 = 0,975.$

Вариант 13. $u = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3, \; x_1 = 1,154, \; x_2 = 2,502, \; x_3 = 0,775.$

Вариант 14. $u = \lg\left(x_1^2 + x_2^2\right), \; x_1 = 0,90, \; x_2 = 1,501.$

Вариант 15. $u = (x_2 + x_1^2) \cdot x_3, \; x_1 = 2,18, \; x_2 = 1,213, \; x_3 = 2,0124.$

Вариант 16. $u = x_1^2 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1, \; x_1 = 2,394, \; x_2 = 2,115, \; x_3 = 0,975.$

Задание 5.

Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = c_2 \end{cases}$ по правилу Крамера, считая, что коэффициенты a_{21}, a_{22}, c_1, c_2 заданы точно, оценить погрешность решения, ответ записать только с верными цифрами.

№ варианта	a_{11} a_{21}	a_{12} a_{22}	c_1 c_2	№ варианта	a_{11} a_{21}	a_{12} a_{22}	c_1 c_2
1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\sqrt{3}$ $1,732$	$\sqrt{3,005}$ $1,733$	1.32 $4,81$	2	$e^{1,2}$ $3,320$	$\sin(1,5)$ $0,997$	$4,32$ $2,87$
3	$\sqrt{5}$ $2,236$	$\sqrt{5,005}$ $2,238$	$2,76$ $1,95$	4	$e^{0,8}$ $2,225$	$\sin(1,4)$ $0,985$	$3,51$ $2,25$
5	$\sqrt{7}$ $2,645$	$\sqrt{7,005}$ $2,647$	$-1,89$ $5,76$	6	$e^{1,3}$ $3,669$	$\sin(0,8)$ $0,717$	$9,17$ $4,29$

Окончание

1	2	3	4	5	6	7	8
7	$\sqrt{9,1}$ $3,017$	$\sqrt{9,005}$ $3,000$	$10,97$ $-1,75$	8	$e^{1,5}$ $4,481$	$\sin(0,7)$ $0,644$	$9,17$ $4,29$
9	$\sqrt{3}$ $1,732$	$\sqrt{27}$ $5,190$	$10,73$ $0,923$	10	$\ln(4)$ $1,386$	$\sqrt{7,005}$ $2,647$	$6,81$ $-0,532$
11	$\sqrt{3}$ $1,732$	$\sqrt{19}$ $4,359$	$11,23$ $0,827$	12	$\sqrt[3]{5}$ $1,710$	$e^{1,2}$ $3,320$	$11,92$ $10,81$
13	$\sqrt{3}$ $1,732$	$\sqrt{17}$ $4,122$	$10,87$ $1,293$	14	$\sqrt[3]{6}$ $1,817$	$e^{0,8}$ $2,225$	$8,75$ $7,21$
15	$\ln(5)$ $1,609$	$\sqrt{3}$ $1,732$	$8,71$ $0,929$	16	$\sqrt[3]{7}$ $1,913$	$e^{1,3}$ $3,669$	$8,75$ $7,21$

ЛИТЕРАТУРА

1. Б а х в а л о в Н. С. Численные методы: учеб. пособие/ Н.С. Бахвалов. М.: Наука, 1975.

2. Б а х в а л о в Н. С. Численные методы/ Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. М.: Наука, 1987.

3. К а л и т к и н Н. Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. М.: Наука, 1978.

4. К р ы л о в В. И. Вычислительные методы/ В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный. Т. 1. М. : Наука, 1976.

5. М а р ч у к Г. И. Методы вычислительной математики/ Г.И. Марчук. М.: Наука, 1980.

6. С а м а р с к и й А. А. Введение в численные методы/ А.А. Самарский. М.: Наука, 1983.