Белорусская государственная
орденов Октябрьской Революции
и Трудового Красного Знамени
сельскохозяйственная академия

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЙ ПО ТЕМЕ «ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ»

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В процессе рассмотрения прикладных задач любой области естествознания исследователям зачастую приходится искать корни нелинейных уравнений. В большинстве случаев такие задачи не имеют аналитического решения. Поэтому для нахождения корней уравнения исследователь должен выбрать наиболее эффективный численный метод.

Практическая ценность численного метода в значительной мере определяется быстротой и простотой вычислительного алгоритма, а также возможностью реализации его на ЭВМ. Выбор же подходящего метода для решения уравнения зависит от характера рассматриваемой задачи.

В зависимости от числа корней подобные уравнения можно классифицировать как *алгебраические* и *трансцендентные.* В отличие от *алгебраических* уравнений, имеющих конечное число решений, *трансцендентные* – имеют неопределенное число решений.

Данные методические указания представляют собой руководство по изучению основных математических методов приближённого решения нелинейных уравнений на ЭВМ с использованием пакетов прикладных программ Excel, MathCAD и рекомендуются для студентов мелиоративно-строительного факультета специальности 07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений». Кроме этого, они могут быть использованы магистрантами и аспирантами в качестве пособия для самостоятельного изучения и закрепления материала по рассматриваемой теме с последующим применением приведенных методов для решения конкретных производственных задач.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы [Электронный ресурс] / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – Электрон. текстовые данные. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. – 639 с. – Режим доступа: https://csc-knu.github.io/numerical-analysis/books/bahvalov-zhidkov-kobelkov-2015.pdf

2. Зенков, А. В. Численные методы : учеб. пособие / А. В. Зенков. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2016. – 124 с.

1. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Основные понятия численного решения уравнения

Рассмотрим уравнение $f(x) = 0$, (1)

где $f(x)$ – некоторая функция, заданная на конечном или бесконечном промежутке.

Всякое значение ξ, обращающее функцию $f(x)$ в нуль, т.е. такое, при котором $f(\xi) = 0$, называется корнем уравнения (1), или нулём функции $f(x)$.

Методы решения нелинейных уравнений делятся на: прямые и итерационные.

Прямые методы позволяют записать корни в виде некоторого конечного соотношения (формулы). Из школьного курса алгебры известны такие методы для решения тригонометрических, логарифмических, показательных, а также простейших алгебраических уравнений. Найти аналитическое решение уравнения – значит, определить все его корни.

Как известно, большинство уравнений не имеют аналитического решения. В первую очередь это относится к большинству трансцендентных уравнений. Доказано также, что нет определенного алгоритма, по которой можно было бы решить произвольное алгебраическое уравнение выше четвертой степени. Кроме того, в некоторых случаях уравнение содержит коэффициенты, известные лишь приблизительно, и, следовательно, сама задача о точном определении корней уравнения теряет смысл. Для их решения используются итерационные (приближённые с заданной степенью точности) методы.

Пусть в уравнении (1):

1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ вместе со своими производными 1-го и 2-го порядка;

2) значения $f(x)$ на концах отрезка имеют разные знаки ($f(a) \cdot f(b) < 0$);

3) первая и вторая производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют определенный знак на всем отрезке.

Первые два условия гарантируют то, что внутри отрезка $[a; b]$ находится хотя бы один корень, а из третьего следует, что $f(x)$ на данном интервале монотонна и поэтому корень будет единственным.

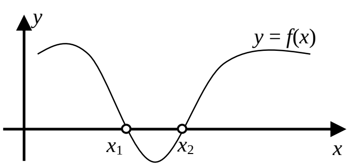


Рис. 1. Геометрический смысл корня уравнения.

Решая уравнения итерационными методами, как правило, пользуются геометрическим смыслом корня уравнения.

Графически корень уравнения есть абсцисса пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Ox (рис. 1).

Это значит, что хотя бы один корень находится в интервале, на котором функция f(x) меняет знак на противоположный.

Задача нахождения корня уравнения $f(x)=0$ приближёнными методами состоит из двух этапов:

1) отделение (локализация) корня – нахождение отрезка, на котором содержится единственный корень;

2) уточнение корня – нахождение его с заданной степенью точности.

Обычно отделение корня производят аналитическим или графическим способами.

При отделении корня аналитическим способом целесообразно уравнение привести к виду (1) и протабулировать функцию, стоящую в левой его части на некотором заведомо большом отрезке числовой прямой или области определения. Корни будут на тех интервалах, на концах которых функция имеет значения, различные по знаку.

Пример. Рассмотрим уравнение $x^3 - 6x + 2 = 0$. Уравнение имеет вид (1), поэтому соответствующей функцией будет являться $f(x) = x^3 - 6x + 2$.

Функция определена на всей числовой прямой. Протабулировав ее на заданном интервале, получим:

x	$-\infty$	-3	-1	0	1	3	$+\infty$
$f(x)$	–	–	+	+	–	+	+

Следовательно, уравнение имеет три действительных корня, лежащих в интервалах [–3; –1], [0; 1] и [1; 3].

К сожалению, чётких рекомендаций по выбору интервала, содержащего единственный корень, не существует. И в этом не последнюю роль играет интуиция и опыт исследователя.

В инженерной практике зачастую прибегают к графическому способу отделения корней. Принимая во внимание, что действительные корни уравнения (1) – это точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью абсцисс, достаточно построить график функции $f(x)$ и отметить на оси Ox отрезки, содержащие по одному корню.

Второй этап решения уравнения состоит в последовательном уточнении начального приближения x_0. Каждый такой шаг называется *итерацией*. В результате итераций находится последовательность приближенных значений корня $x_0, x_1, ..., x_n$. Если эти значения с увеличением числа итераций n приближаются к истинному значению корня, то говорят, что итерационный процесс *сходится*.

1.2. Уточнение корня по методу половинного деления (бисекции)

Предположим, что корень уравнения $f(x) = 0$ отделён на отрезке $[a; b]$ и его необходимо уточнить с погрешностью, не превосходящей ε. Для этого данный отрезок точкой x_0 разобьём пополам на 2 отрезка $[a; x_0]$ и $[x_0; b]$, (рис. 2):

$$x_0 = \frac{a+b}{2}. \qquad (2)$$

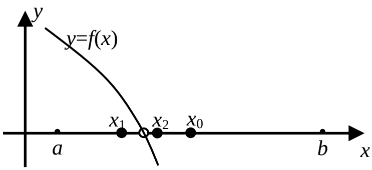


Рис. 2. Графическая интерпретация метода бисекции.

Для дальнейшего исследования выберем тот отрезок, на концах которого функция $f(x)$ принимает значения, различные по знаку. С математической точки зрения это означает, что произведение значений функции на концах этого интервала меньше нуля.

Предположим, что это отрезок $[a; x_0]$, т.е. $f(a) \cdot f(x_0) < 0$. Отрезок $[a; x_0]$ точкой x_1 делим пополам. Получим отрезки $[a; x_1]$ и $[x_1; x_0]$, из которых выберем тот, на концах которого функция меняет знак на противоположный. Данный процесс будем продолжать до тех пор, пока разность значений концов выбранного отрезка по модулю станет меньше ε. Тогда за корень с заданной точностью выбирают любое число из последнего отрезка. Обычно это середина последнего отрезка.

Приведенный метод является универсальным для решения любого уравнения. Метод прост, надёжен и всегда сходится. Однако скорость приближения к корню значительно меньшая по сравнению с некоторыми другими методами.

При реализации этого метода в электронных таблицах удобно делить отрезок не пополам, а на n равных частей. Это позволяет уже на первом итерационном шаге сузить интервал поиска решения в n раз.

Предложим варианты решения задачи в Excel и MathCAD.

Пример. Найти корень уравнения $\sqrt{x} - \dfrac{\cos(x)}{12} = \dfrac{1}{24}$ с погрешностью, не превосходящей ε=0,0001.

Решение

1. Реализуем метод половинного деления в Excel. Для этого преобразуем исходное уравнение к виду (1). Получим уравнение $\sqrt{x}-\frac{\cos(x)}{12}-\frac{1}{24}=0$. Исследуем функцию $f(x)=\sqrt{x}-\frac{\cos(x)}{12}-\frac{1}{24}$.

Данная функция определена на интервале [0; ∞). Для отделения корня выберем заведомо большой отрезок из области определения, например [0; 100]. Протабулируем исследуемую функцию на выбранном отрезке. Для упрощения метода разобьём отрезок на 10 равных частей. Макет таблицы и результаты табулирования показаны на рис. 3, 4.

	A	B	C	D	E
1	x	f(x)	a	b	h
2	=C2	=A2^(1/2)-COS(A2)/12-1/24	0	100	=(D2-C2)/10
3	=A2+$E$2	=A3^(1/2)-COS(A3)/12-1/24			
4	=A3+$E$2	=A4^(1/2)-COS(A4)/12-1/24			
5	=A4+$E$2	=A5^(1/2)-COS(A5)/12-1/24			
6	=A5+$E$2	=A6^(1/2)-COS(A6)/12-1/24			
7	=A6+$E$2	=A7^(1/2)-COS(A7)/12-1/24			
8	=A7+$E$2	=A8^(1/2)-COS(A8)/12-1/24			
9	=A8+$E$2	=A9^(1/2)-COS(A9)/12-1/24			
10	=A9+$E$2	=A10^(1/2)-COS(A10)/12-1/24			
11	=A10+$E$2	=A11^(1/2)-COS(A11)/12-1/24			
12	=A11+$E$2	=A12^(1/2)-COS(A12)/12-1/24			

Рис. 3. Макет расчётной таблицы по методу половинного деления.

	A	B	C	D	E
1	x	f(x)	a	b	h
2	0	-0,125	0	100	10
3	10	3,19053			
4	20	4,39646			
5	30	5,4227			
6	40	6,33847			
7	50	6,94899			
8	60	7,78367			
9	70	8,27216			
10	80	8,9118			
11	90	9,48251			
12	100	9,88647			

Рис. 4. Результаты табулирования функции.

Так как функция меняет знак с “–” на “+” на интервале [0; 10], то можно сделать вывод что этот интервал содержит хотя бы один корень.

	A	B	C	D	E
1	x	f(x)	a	b	h
2	0	-0,13	0	10	1
3	1	0,913			
4	2	1,407			
5	3	1,773			
6	4	2,013			
7	5	2,171			
8	6	2,328			
9	7	2,541			
10	8	2,799			
11	9	3,034			
12	10	3,191			

Рис. 5. Первая итерация.

Тогда дальнейший процесс уточнения корня сведётся к следующей процедуре. Заменяем значение начала интервала a, стоящее в ячейке C2, на значение начала найденного интервала, а значение конца интервала *b* в ячейке D2 – на соответствующее значение найденного конца интервала, т. е. 10 (рис. 5). Заметим, что при этом пересчет таблицы происходит автоматически. Процедуру повторяем до тех пор (рис. 6 – 9), пока выбранный шаг не станет меньше либо равен заданной погрешности ε.

	A	B	C	D	E
1	x	f(x)	a	b	h
2	0	-0,13	0	1	0,1
3	0,1	0,192			
4	0,2	0,324			
5	0,3	0,426			
6	0,4	0,514			
7	0,5	0,592			
8	0,6	0,664			
9	0,7	0,731			
10	0,8	0,795			
11	0,9	0,855			
12	1	0,913			

Рис. 6. Вторая итерация.

	A	B	C	D	E
1	x	f(x)	a	b	h
2	0	-0,13	0	0,1	0,01
3	0,01	-0,02			
4	0,02	0,016			
5	0,03	0,048			
6	0,04	0,075			
7	0,05	0,099			
8	0,06	0,12			
9	0,07	0,14			
10	0,08	0,158			
11	0,09	0,175			
12	0,1	0,192			

Рис. 7. Третья итерация.

	A	B	C	D	E
1	x	f(x)	a	b	h
2	0,01	-0,025	0	100	0,001
3	0,011	-0,02			
4	0,012	-0,015	**0,01**	**0,02**	
5	0,013	-0,011			
6	0,014	-0,007			
7	0,015	-0,003			
8	0,016	0,0015			
9	0,017	0,0054			
10	0,018	0,0092			
11	0,019	0,0129			
12	0,02	0,0164			

Рис. 8. Четвёртая итерация.

	A	B	C	D	E
1	x	f(x)	a	b	h
2	0,015	-0,003	0	100	0,0001
3	0,0151	-0,002			
4	0,0152	-0,002	**0,015**	**0,0016**	
5	0,0153	-0,001			
6	0,0154	-9E-04			
7	0,0155	-5E-04			
8	0,0156	-9E-05			
9	0,0157	0,0003			
10	0,0158	0,0007			
11	0,0159	0,0011			
12	0,016	0,0015			

Рис. 9. Пятая итерация.

В качестве корня возьмём середину последнего найденного интервала. В процессе вычислений проследим, чтобы после каждого итерационного шага в столбце значений функции расчётной таблицы был переход знака.

Для рассматриваемого примера после пяти итерационных шагов замечаем, что нужная точность достигнута. Можно утверждать, что корень находится на интервале [0,0156; 0,0157], а значит, в качестве корня можно взять $\xi = \dfrac{0,0156 + 0,0157}{2} = 0,01565$.

2. Вариант реализации метода деления отрезка пополам в MathCAD показан на рис. 10.

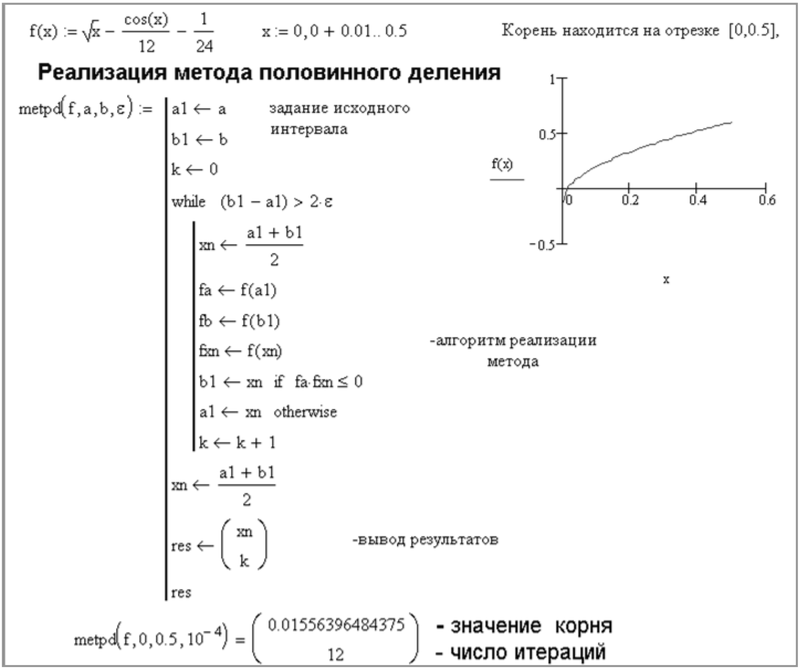


Рис. 10. Решение уравнения методом половинного деления в MathCAD.

1.3. Уточнение корня по методу хорд

Метод хорд, как и рассмотренный метод бисекции, требует априорного знания интервала $[a; b]$, такого, при котором $f(a) \cdot f(b) < 0$.

В данном методе процесс итераций состоит в том, что в качестве приближений к корню уравнения (1) принимаются значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$

точек пересечения хорды AB с осью абсцисс (рис. 11). Точку пересечения нетрудно вычислить. Действительно уравнение хорды AB будет иметь вид

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a} . \qquad (3)$$

Для точки пересечения хорды AB с осью абсцисс ($x = x_1$, $y = 0$) получим уравнение

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a). \qquad (4)$$

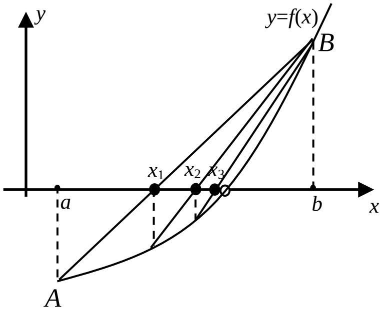


Рис. 11. Графическая интерпретация метода хорд.

Пусть для определенности $f''(x) > 0$ при $a \le x \le b$ (случай $f''(x) < 0$ сводится к нашему, если записать уравнение в виде $-f(x) = 0$). Это означает, что кривая $y = f(x)$ будет вогнута и, следовательно, расположена ниже своей хорды AB. Возможны два случая: 1) $f(a) < 0$, а значит $f(b) > 0$ и 2) $f(a) > 0$, $f(b) < 0$.

В первом случае неподвижен конец b, а последовательные приближения при $x_0 = a$ вычисляются по формуле

$$x_{i+1} = b - \frac{f(b)}{f(b) - f(x_i)}(b - x_i), \ (i = 0, 1, 2, ...) \qquad (5)$$

и образуют ограниченную монотонно возрастающую последовательность, причем

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < \xi < b.$$

Во втором случае конец a неподвижен и последовательные приближения при $x_0 = b$ находятся как

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f(x_i) - f(a)}(x_i - a), \quad (i = 0, 1, 2, ...) \qquad (6)$$

и образуют ограниченную монотонно убывающую последовательность, причем

$$a < \xi < \ldots < x_{i+1} < x_i < \ldots < x_1 < x_0.$$

Обобщая эти результаты, заключаем:

1) в качестве неподвижного следует выбрать тот конец, для которого знак функции $f(x)$ совпадает со знаком её второй производной $f''(x)$;

2) последовательные приближения x_n лежат по ту сторону корня ξ, где функция $f(x)$ имеет знак, противоположный знаку ее второй производной $f''(x)$.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет обнаружено, что

$$|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon, \qquad (7)$$

где ε – заданная предельная абсолютная погрешность.

При реализации данного метода обычно на практике пользуются исходной формулой, фиксируя один и варьируя другим концом локализованного отрезка. Причём варьируется тот конец отрезка, в котором значение функции по знаку совпадает со значением функции в точках приближения к корню.

Представим на примере варианты организации ручного счёта по методу хорд в Excel и MathCAD.

Пример. Найти положительный корень уравнения

$$x^3 - 0{,}2x^2 - 0{,}2x - 1{,}2 = 0$$

с погрешностью, не превышающей $\varepsilon = 0{,}001$.

Решение

1. Реализация метода хорд в Excel при ручном счёте.

Прежде всего, отделяем корень. Так как

$$f(1) = -0{,}6 < 0 \text{ и } f(2) = 5{,}6 > 0,$$

то искомый корень ξ лежит внутри отрезка [1; 2]. Полученный отрезок велик, поэтому разделим его пополам. Так как

$$f\,(1{,}5) = 1{,}425 > 0, \text{ то } 1 < \xi < 1{,}5.$$

Так как $f''(x) = 6x - 0{,}4 > 0$ при $1 < x < 1{,}5$ и $f(1{,}5) > 0$, то воспользуемся формулой (6) для решения поставленной задачи. Проделаем первый итерационный шаг. Реализация его в Excel показана на рис. 12, 13.

$$x_1 = 1 - \frac{-0{,}6}{1{,}425 + 0{,}6}(1{,}5 - 1) = 1{,}148;$$

$$|x_1 - x_0| = 0{,}148 > \varepsilon,$$

$$f\,(x_1) = -0{,}17974;$$

	A	B	C	D	E	F
1		x	f(x)	a	b	Погрешность
2	Начало	=D2	=B2^3-0,2*B2^2-0,2*B2-1,2	1	1,5	0,001
3	Конец	=E2	=B3^3-0,2*B3^2-0,2*B3-1,2			=ABS(B2-B4)
4	Приближение	=B2-C2*(B3-B2)/(C3-C2)	=B4^3-0,2*B4^2-0,2*B4-1,2	Контроль		=F2-F3

Рис. 12. Макет расчётной таблицы метода хорд

	A	B	C	D	E	F
1		x	f(x)	a	b	Погрешность
2	Начало	1,000	-0,600	1	1,5	**0,001**
3	Конец	1,500	1,425			**0,1481**
4	Приближение	**1,148**	-0,17974	Контроль		***<u>-0,1471</u>***

Рис. 13. Результаты первого итерационного шага

Так как число – 0,1471, стоящее в ячейке контроля, по абсолютной величине превышает заданную погрешность, продолжаем вычисления и делаем второй итерационный шаг (рис. 14). Мы определились с расчётной формулой, для которой зафиксировано значение конечной точки выбранного интервала, поэтому при следующих итерационных шагах нам достаточно изменять начальное значение интервала на значение, полученное в ячейке B4, а контроль вести по текущей погрешности, находящейся в ячейке F3.

$$x_2 = 1{,}148 + \frac{0{,}17974}{1{,}425 + 0{,}17974}(1{,}5 - 1{,}148) = 1{,}188;$$

$$|x_2 - x_1| = 0{,}0394 > \varepsilon;$$

$$f(x_2) = -0{,}04477.$$

	A	B	C	D	E	F
1		x	f(x)	a	b	Погрешность
2	Начало	1,148	-0,180	1	1,5	**0,001**
3	Конец	1,500	1,425			**0,0394**
4	Приближение	**1,188**	-0,04477	Контроль		***<u>-0,0384</u>***

Рис. 14. Результаты второго итерационного шага.

Так как погрешность ещё велика, делаем третий итерационный шаг (рис. 15).

$$x_3 = 1{,}188 + \frac{0{,}04477}{1{,}425 + 0{,}04477}(1{,}5 - 1{,}188) = 1{,}197;$$

$$|x_3 - x_2| = 0{,}0095 < \varepsilon;$$

$$f(x_3) = -0{,}01062.$$

	A	B	C	D	E	F
1		x	f(x)	a	b	Погрешность
2	Начало	1,188	-0,045	1	1,5	**0,001**
3	Конец	1,500	1,425			**0,0095**
4	Приближение	**1,197**	-0,01062	Контроль		***<u>-0,0085</u>***

Рис. 15. Результаты третьего итерационного шага.

Поступая аналогично, на ещё двух итерационных шагах приходим к результату решения задачи.

После пяти итерационных шагов (рис. 16) можно принять $\xi = 1{,}20$ с погрешностью $\varepsilon = 0{,}001$. Заметим, что точный корень уравнения равен $\xi = 1{,}2$.

	A	B	C
1		x	f(x)
2	Начало	1,197	-0,011
3	Конец	1,500	1,425
4	Приближение	**1,199**	-0,00249

	A	B	C
1		x	f(x)
2	Начало	1,199	-0,002
3	Конец	1,500	1,425
4	Приближение	**1,200**	-0,00058

Рис. 16. Результаты четвёртого и пятого итерационных шагов

2. Реализация метода хорд в Excel в автоматическом режиме.

Приведенный выше алгоритм может быть усовершенствован с учётом возможностей Excel. Для этого достаточно на листе Excel оформить задачу так, как показано на рис. 12, и проделать первый итерационный шаг. Затем в меню **Сервис** выбрать команду **Параметры** и вкладку **Вычисления**. Установить флажок **Итерации**. В поле **Предельное число итераций** ввести количество итераций при обработке формул, а в поле **Относительная погрешность** ввести заданную погрешность вычислений. В ячейке **B2** сделать циклическую ссылку =B4 и нажать ввод. При этом Excel самостоятельно проделает необходимое число итерационных шагов по формуле, занесённой в ячейку **B4**, закончив вычисления при достижении указанной точности ε.

3. Реализация метода хорд в MathCAD показана на рис. 17.

Для этого проделаем следующие действия:

1) графическим способом отделим корень уравнения;

2) создадим функцию **methord(*f*, *a*, *b*, ε)**, реализующую приведенный алгоритм;

3) вычислим данную функцию при заданных параметрах: f – исходная функция, $a = 1$ – начало отрезка локализации корня, $b = 1{,}5$ – конечная точка отрезка локализации, $\varepsilon=10^{-3}$– точность вычислений.

Результатом вычислений будет вектор, состоящий из двух элементов, первым из которых будет сам корень, второй – число проведенных итераций.

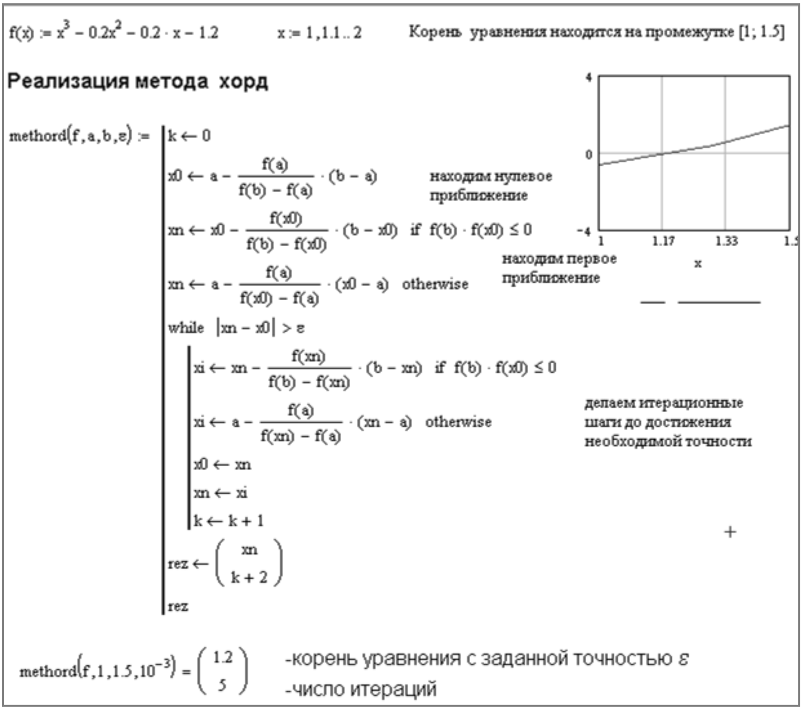


Рис. 17. Решение уравнения методом хорд в MathCAD

1.4. Уточнение корня по методу касательных (методу Ньютона)

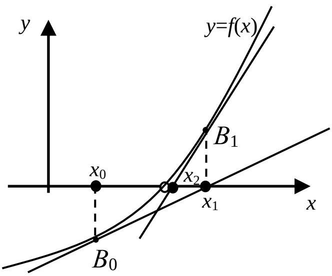


Рис. 18. Графическая интерпретация метода Ньютона

Отличие этого итерационного метода от предыдущего состоит в том, что вместо хорды на каждом шаге проводится касательная к кривой $y = f(x)$ при $x = x_i$ и ищется точка пересечения касательной с осью абсцисс (рис. 18). При этом не обязательно задавать отрезок $[a; b]$, содержащий корень уравнения (1), достаточно найти лишь некоторое начальное приближение корня $x = x_0$.

Применяя метод Ньютона, следует руководствоваться следующим правилом: в качестве исходной точки x_0 выбирается тот конец интервала $[a; b]$, которому отвечает ордината того же знака, что и знак $f''(x)$.

Уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ через точку B_0 с координатами x_0 и $f(x_0)$, имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \quad (8)$$

Отсюда найдем следующее приближение корня x_1 как абсциссу точки пересечения касательной с осью Ox ($y = 0$):

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Аналогично могут быть найдены и следующие приближения как точки пресечения с осью абсцисс касательных, проведенных в точках B_1, B_2 и т.д. Формула для i+1 приближения имеет следующий вид:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}. \quad (9)$$

Для окончания итерационного процесса может быть использовано или условие $|f(x_i)| < \varepsilon$, или условие близости двух последовательных приближений $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$ (i=0, 1, …, n) .

Итерационный процесс сходится, если

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0. \quad (10)$$

Покажем реализацию метода Ньютона в Excel на примере, рассмотренном выше. Для этого оформим лист электронной таблицы так, как это показано на рис. 19.

	A	B	C	D	E
1		**x**	**f(x)**	**f'(x)**	**Погрешность**
2		1	=B2^3-0,2*B2^2-0,2*B2-1,2	=3*B2^2-0,4*B2-0,2	0,001
3	**Корень**	=B2-C2/D2	=B3^3-0,2*B3^2-0,2*B3-1,2		
4					

Рис. 19. Макет расчётной таблицы метода Ньютона

На рис. 20 показаны результаты первого итерационного шага.

	A	B	C	D	E
1		x	f(x)	f'(x)	Погрешность
2		1	-0,6	2,4	0,001
3	Корень	1,25	0,190625		

Рис. 20. Результаты первого итерационного шага по методу Ньютона

В меню **Сервис** выберем команду **Параметры** и вкладку **Вычисления**. Появившееся окно оформим по образцу, показанному на рис. 21.

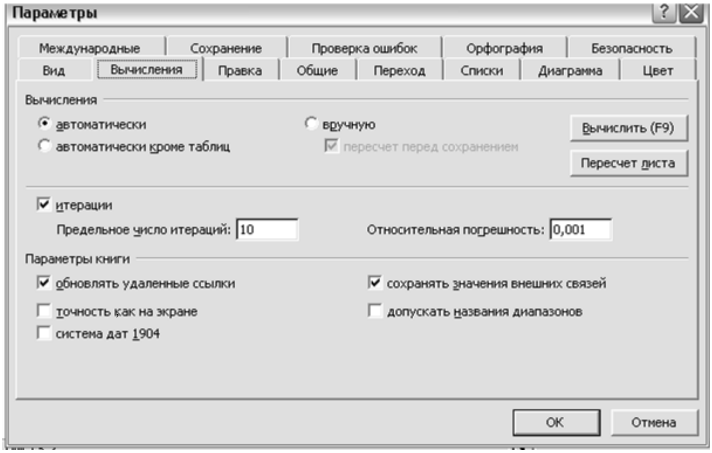


Рис. 21. Вид окна “Параметры”

Циклический процесс вычисления стартует, когда в расчётной таблице появится перекрёстная ссылка. Для этого в ячейку **B2** необходимо внести формулу =B3. Данная команда послужит началом итерационного процесса. Окончательный вид расчётной таблицы показан на рис. 22.

	A	B	C	D	E
1		x	f(x)	f'(x)	Погрешность
2		1,2	6,8395E-11	3,64	0,001
3	Корень	1,2	0		

Рис. 22. Результаты итерационного процесса по методу Ньютона

Таким образом, корнем уравнения с заданной точностью является $\xi=1{,}2$.

Главным недостатком этого метода является то, что при определённых условиях он не обеспечивает сходимость. В частности, это может произойти, когда при промежуточных вычислениях производная функции примет значение, близкое к нулю.

Итерационный процесс по методу Ньютона в MathCAD можно организовать с помощью функции **until(*X*, *Y*)**, которая производит однотипные вычисления по формуле ***Y***, до тех пор, пока заданное выражение ***X*** принимает неотрицательные значения.

Пример. Решить уравнение $x-e^{x}+4=0$ с точностью $\varepsilon=10^{-5}$.

Решение примера в MathCAD показано на рис. 23.

$f(x) := x - e^{x} + 4 \qquad x := 1, 1.1 .. 2$ Корень уравнения находится на промежутке [1; 2]

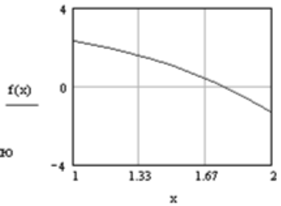
Реализация метода Ньютона

$n := 100 \qquad i := 1 .. n$ Определяем максимальное число ит

$\varepsilon := 10^{-5}$ Определяем погрешность

$x_0 := 1$ Задаём начальное приближение

$f1(x) := \dfrac{f(x)}{\frac{d}{dx}f(x)} \qquad x_1 := x_0 - f1(x_0)$ Делаем первую итерацию



$x_{i+1} := \mathrm{until}\left(\left|x_i - x_{i-1}\right| - \varepsilon, x_i - f1(x_i)\right)$ Функция **until(X, Y)** выполняет итерационный процесс Y, пока выражение X принимает положительное значение

$j := \mathrm{last}(x) \qquad j = 7$ Определяем количество итерационных шагов

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.32791 \\ 1.9035 \\ 1.76236 \\ 1.74914 \\ 1.74903 \\ 1.74903 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Результаты итерационных шагов

$x_{j-1} = 1.749$ -корень уравнения с заданной точностью ε

Рис. 23. Вариант решения уравнения методом Ньютона в MathCAD

1.5. Уточнение корня методом простой итерации (последовательных приближений)

Для использования метода итерации исходное нелинейное уравнение $f(x) = 0$ заменяется равносильным уравнением:

$$x=\varphi(x). \qquad (11)$$

Пусть известно начальное приближение корня $x = x_0$. Подставляя это значение в правую часть уравнения (11), получим новое приближение:

$$x_1=\varphi(x_0).$$

Далее, подставляя каждый раз новое значение корня в уравнение (11), получаем последовательность значений:

$$x_{i+1} = \varphi(x_i), \ (i = 0,\ 1,\ \ldots). \qquad (12)$$

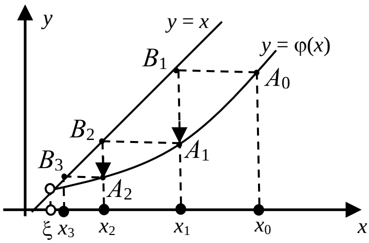


Рис. 25. Графическая интерпретация метода простой итерации.

Геометрически метод итерации может быть пояснен следующим образом. Построим на плоскости xOy графики функций $y = x$ и $y = \varphi(x)$. Каждый действительный корень ξ уравнения (12) является абсциссой точки пересечения кривой $y = \varphi(x)$ с прямой $y = x$ (рис. 24).

Отправляясь от некоторой точки A_0 $[x_0,\ \varphi(x_0)]$, строим ломаную $A_0B_1A_1B_2A_2$, звенья которой попеременно параллельны оси Ox и оси Oy, вершины A_0, A_1, A_2 лежат на кривой $y = \varphi(x)$, а вершины B_1, B_2, B_3 – на прямой $y = x$. Общие абсциссы точек A_1 и B_1, A_2 и B_2, очевидно, представляют собой соответственно последовательные приближения x_1, x_2, ... корня ξ.

Метод итераций $x_{i+1} = \varphi(x_i), \ (i = 0,\ 1,\ \ldots).$ сходится при выполнении условия $|\varphi'(x)|<1$ на выбранном отрезке $[a; b]$ и не зависит от начального приближения $x_0 \in [a; b]$. При этом предельное значение $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ является единственным корнем уравнения $x=\varphi(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Пример. Решить уравнение $x^3 - x - 1 = 0$ с погрешностью, не превышающей $\varepsilon=10^{-3}$, если известно, что корень отделён на отрезке $\xi\in [1; 2]$.

Решение

Уравнение можно записать в виде $x = x^3 – 1$. Здесь $\varphi(x) = x^3 – 1$, следовательно $\varphi'(x)=3x^2$. Нетрудно заметить, что $\varphi'(x) \geq 3$ при $1 \leq x \leq 2$, а значит, условия сходимости процесса итерации не выполнены.

Если же записать исходное уравнение в виде $x=\sqrt[3]{x+1}$, то будем иметь: $\psi(x)=\sqrt[3]{x+1}$ и $\psi'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$.

Отсюда $0<\psi'(x)<\dfrac{1}{3\sqrt[3]{4}}<1$ при $1 \leq x \leq 2$. Это означает, что процесс итерации для рассматриваемого уравнения сходится.

Найдем корень ξ уравнения с заданной точностью. Вычисляем последовательные приближения x_n по итерационной формуле

$$x_i=\sqrt[3]{x_i+1}\ \ (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

1. Организация итерационного процесса нахождения корня уравнения по методу простой итерации в Excel показана на рис. 25.

	A	B	C
1	x	ϕ(x)	X0
2	=C2	=(A2+1)^(1/3)	1
3	=B2	=ЕСЛИ(A3-A2<=0,001;"стоп";(A3+1)^(1/3))	
4	=B3	=ЕСЛИ(A4-A3<=0,001;"стоп";(A4+1)^(1/3))	
5	=B4	=ЕСЛИ(A5-A4<=0,001;"стоп";(A5+1)^(1/3))	
6	=B5	=ЕСЛИ(A6-A5<=0,001;"стоп";(A6+1)^(1/3))	
7	=B6	=ЕСЛИ(A7-A6<=0,001;"стоп";(A7+1)^(1/3))	

Рис. 25. Макет расчётной таблицы метода простой итерации

	A	B	C
1	x	ϕ(x)	X0
2	1,0000	1,260	1
3	1,2599	1,312	
4	1,3123	1,322	
5	1,3224	1,324	
6	1,3243	1,325	
7	1,3246	стоп	

Рис. 26. Результаты вычислений по методу простых итераций

Результаты расчётов (рис. 26) показывают, что уже на шестом шаге итерационного процесса достигается заданная точность. При этом корень уравнения ξ=1,325.

В Excel довольно просто реализуется процесс циклических вычислений по методу простых итераций. Данный способ на основании примеров, рассмотренных выше, предлагается студентам оформить самостоятельно.

2. Решение примера в MathCAD показано на рис. 27.

Реализация метода итераций

$n := 100$ $\quad i := 1..n$ $\quad \varepsilon := 10^{-3}$ $\quad x_0 := 1$

$\phi(x) := \sqrt[3]{x+1}$ — Из уравнения выразим x. Полученное выражение в правой части обозначим через функцию $\phi(x)$

$x_1 := \phi(x_0)$

$x_{i+1} := \mathrm{until}(|x_i - x_{i-1}| - \varepsilon, \phi(x_i))$ — Итерационный процесс

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.2599 \\ 1.3123 \\ 1.3224 \\ 1.3243 \\ 1.3246 \\ 0 \end{pmatrix}$ — Результаты итераций

$j := \mathrm{last}(x)$ $\quad j = 6$ — Число итераций

$x_{j-1} = 1.325$ — Корень уравнения, посчитанный с заданной точностью

Рис. 27. Решение уравнения методом простых итераций в MathCAD

1.6. Решение алгебраических и трансцендентных уравнений средствами Excel и MathCAD

В Excel и MathCAD встроены средства автоматического поиска решения алгебраических и трансцендентных уравнений. Рассмотрим их применение.

Решение уравнений средствами Excel. В Excel это реализуется через диалоговые окна **“Подбор параметра”** и **“Поиск решения”**.

Решение уравнений через диалоговое окно **“Подбор параметра”** позволяет организовать поиск приближённого значения одной ячейки при заданном значении другой, ссылающейся на неё. Так как в данном случае при нахождении корней используется метод простой итерации, результат будет зависеть от начального приближения. В качестве корня будет взято значение, ближайшее к начальному приближению.

Диалоговое окно **“Подбор параметра”** открывается щелчком по строке меню **Сервис⇒ Подбор параметра**.

Пример. Решить уравнение $-2 \cdot x \cdot e^{-x^2} + 4 \cdot x + 1 = 0$ через диалоговое окно “Подбор параметра”, если известно, что один из корней находится вблизи точки x=0.

Решение

Макет заполнения расчётной таблицы показан на рис. 28. Расположим начальное приближение в ячейке **A2**. В некоторую другую выбранную ячейку, например **В2**, вводим формулу левой части уравнения, заменяя х на **А2**.

	A	B
1	x	f(x)
2	0	=-2*A2*EXP(-(A2^2))+4*A2+1

	A	B
1	x	f(x)
2	0	1

Рис. 28. Макет расчётной таблицы и результаты её вычислений

Откроем диалоговое окно **«Подбор параметра»** и заполним его поля так, как это показано на рис. 29.

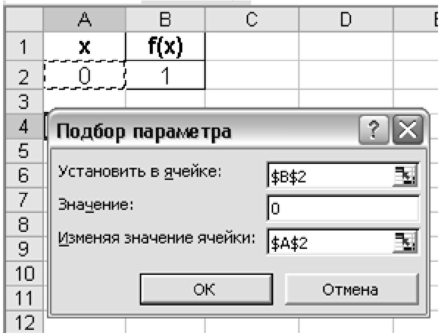


Рис. 29. Вид окна “Подбор параметра”

При нажатии кнопки **“ОК”** появится окно с сообщением (рис. 30).

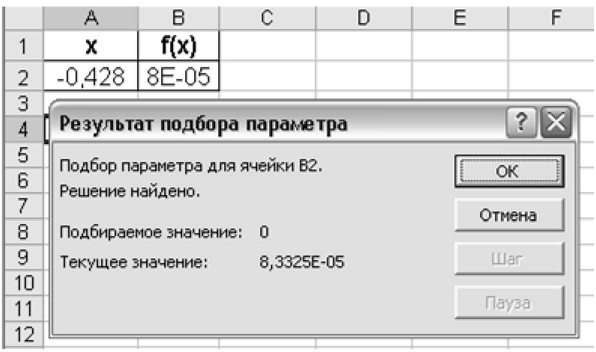


Рис. 30. Сообщение о результатах подбора параметра

Нажатием кнопки **“ОК”** закрываем панель **«Результат подбора параметра»**. Приближенный результат решения уравнения будет находиться в ячейке **A2**. Замечаем, что для данного примера приближённый корень уравнения ξ= – 0,428.

Замечание 1. В случае, когда значение корня записано с плавающей запятой, необходимо увеличить разрядность результата, соответствующего полученному приближению. При этом следует воспользоваться вкладкой «**Число**» диалогового окна «**Формат ячеек**».

Замечание 2. Для уравнения $f(x) = 0$ с известным корнем ξ нахождение дополнительных корней эквивалентно поиску корней уравнения $f(x) / (x – ξ)=0$. Проще искать корень выражения $h(x) = f(x) / (x – ξ)$, чем пробовать искать другой корень уравнения, выбирая различные начальные приближения.

Более широкие возможности решения нелинейных уравнений, неравенств и систем реализуются с помощью надстройки **“Поиск решения”**. Данную надстройку можно активизировать в меню **“Сервис”**, щёлкнув по выкладке **“Надстройки”**, а затем поставив галочку напротив строки **“Поиск решения”** появившегося одноимённого окна.

Это позволит при последующих запусках Excel загружать данную надстройку в меню “**Сервис”**.

Например. Решим поставленную выше задачу через **“Поиск решения”**.

Для этого достаточно на листе Excel оформить задачу так, как это показано на рис. 29. Щелчком в меню Excel **Сервис ⇒ Поиск решения** открыть диалоговое окно **“Поиск решения”** и задать сценарий решения (рис. 31).

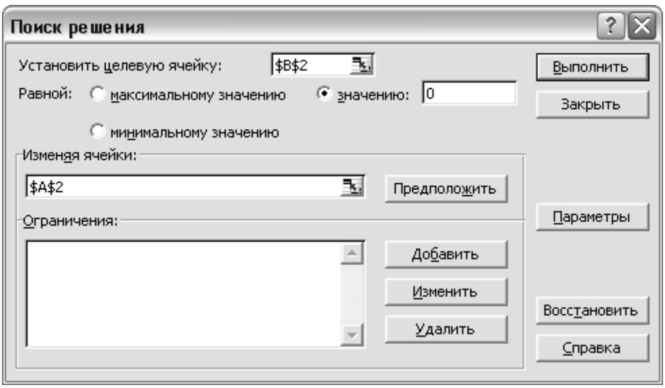


Рис. 31. Вид окна “Поиск решения”

На рис. 31 показаны три режима вычислений, устанавливающие в целевой ячейке соответственно: максимальное значение, минимальное значение, заданное значение. По команде “Выполнить” проводятся вычисления, возвращающие результат, ближайший к начальному приближению. Пока нам будет нужен только последний режим. Работа в нем очень похожа на работу со средством **“Подбор параметра”**.

На рис. 32 показаны параметры, при помощи которых пользователь может управлять процессом поиска решения. Окно параметров запускается нажатием на соответствующую кнопку **“Параметры”**. Воспользовавшись кнопкой **“Справка”**, можно ознакомиться с подробным их описанием.

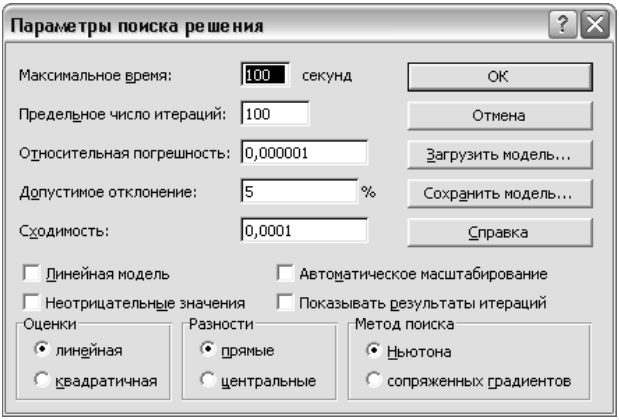


Рис. 32. Вид окна “Параметры поиска решения”

Нажатие кнопки **“Выполнить”** позволяет найти решение исходного уравнения $\xi = -0{,}428$ (рис. 33).

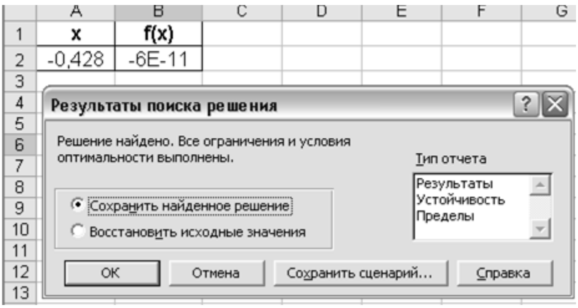


Рис. 33. Сообщение о результатах поиска решения

Решение уравнений средствами MathCAD. MathCAD позволяет находить через встроенные функции не только приближённое решение уравнения, но и для большинства алгебраических уравнений определять их аналитическое решение.

Для простейших уравнений вида f(x)=0 решение в MathCAD находится с помощью функции **root(f(*x*1, *x*2, …), *x*1, *a*, *b*)**. Она возвращает значение ***x*1**, принадлежащее отрезку **[*a*; *b*]**, при котором выражение или функция ***f*(*x*)** обращаются в 0. При этом используется метод хорд. Поэтому перед применением данной функции должно быть определено начальное приближение к корню.

Если после многих итераций MathCAD не находит подходящего приближения, то появится сообщение **"отсутствует сходимость"**. Эта ошибка может быть вызвана следующими причинами:

– уравнение не имеет корней;

– корни уравнения расположены далеко от начального приближения;

– выражение имеет локальные *max* и *min* между начальным приближением и корнями;

– выражение имеет разрывы между начальными приближениями и корнями;

– выражение имеет комплексный корень, но начальное приближение было вещественным.

Чтобы установить причину ошибки, необходимо исследовать график функции f(x). Он поможет выяснить наличие корней уравнения f(x)=0 и, если они есть, то определить приблизительно их значения. Чем точнее выбрано начальное приближение корня, тем быстрее будет **root** сходиться.

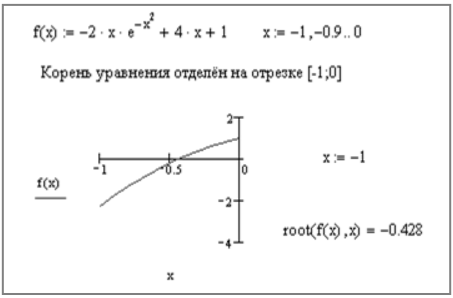


Рис. 34. Решение уравнения в MathCAD с помощью функции **root.**

На рис. 34 показано решение поставленной задачи с помощью функции **root.**

Для изменения точности, с которой функция **root** ищет корень, нужно изменить значение системной переменной TOL. Если значение TOL увеличивается, функция **root** будет сходиться быстрее, но ответ будет менее точен. Если значение TOL уменьшается, то функция **root** будет сходиться медленнее, но ответ будет более точен. Чтобы изменить значение TOL в определенной точке рабочего документа, этой переменной присваивается новое значение. Например, TOL:=0,0001.

Для нахождения корней полинома степени n

$$v_n x^n + \ldots + v_2 x^2 + v_1 x + v_0$$

целесообразно использовать функцию **polyroots**. В отличие от функции **root** функция **polyroots** не требует начального приближения и возвращает сразу все корни, как вещественные, так и комплексные. Данная функция **polyroots(*v*)** имеет один аргумент ***v***, являющийся вектором длины $n + 1$, содержащий коэффициенты полинома, располагающиеся по возрастанию степеней переменной.

Рисунок 36 иллюстрирует решение уравнения

$$x^5 - 3{,}15x^4 + 4{,}12x^2 - 6{,}13 = 0$$

посредством функции **polyroots.**

$$v := \begin{pmatrix} -6.13 \\ 0 \\ 4.12 \\ 0 \\ -3.15 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -0.932 + 0.56i \\ -0.932 - 0.56i \\ 1.157 + 0.761i \\ 1.157 - 0.761i \\ 2.7 \end{pmatrix}$$

Рис. 36. Решение уравнения в MathCAD
с помощью функции **polyroots.**

Имеются некоторые задачи, для которых возможности MathCAD позволяют находить решения в символьном (аналитическом) виде. Для этого необходимо:

– задать уравнение (для ввода знака равенства используйте комбинацию клавиш **Ctrl=**);

– щелчком мыши выделить переменную, относительно которой нужно решить уравнение;

– выбрать пункт меню **Символика ⇒ Переменные ⇒ Разрешить**.

З а м е ч а н и е. Для символьного решения уравнения в MathCAD нет необходимости записывать всё уравнение, достаточно ввести лишь приведенную левую часть. Если MathCAD не находит знака равенства, он предполагает, что требуется приравнять записанное выражение к нулю.

Символьное решение приведенного выше уравнения показано на рис. 37.

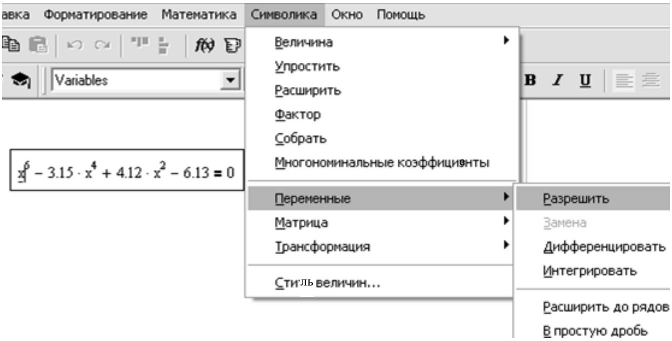


Рис. 37. Символьное решение уравнений в MathCAD.

2. ЗАДАНИЯ, РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

1. Найти корень уравнения $x^4 - 4x - 1 = 0$ с погрешностью, не превосходящей $\varepsilon = 0{,}0001$, методом деления отрезка пополам в EXCEL и MathCAD на [–1; 0] и [1; 2]. Сравнить результаты.

2. Отделить корни уравнения $x^2 \ \operatorname{arctg}(x) - 1 = 0$ и уточнить их с точностью $\varepsilon = 0{,}0001$ методом деления отрезка пополам в EXCEL, разбивая отделённые отрезки на 10 элементарных участков.

3. Методом бисекции найти наименьший корень уравнения

$$e^x + e^{-3x} - 4 = 0$$

с точностью $\varepsilon = 0{,}000001$ в MathCAD. Сколько итерационных шагов при этом нужно выполнить?

4. Методом хорд в EXCEL и MathCAD найти корень уравнения $(2x)^3 + 6^x = 0$ с точностью $\varepsilon = 0{,}0001$.

5. По методу хорд произвести уточнение наибольшего корня уравнения $2x - \ln(x) - 4 = 0$ с погрешностью, не превосходящей $\varepsilon = 0{,}001$, организовав процесс циклических вычислений в Excel.

6. Сколько потребуется итераций при вычислении корня уравнения $e^x - 2(x-1)^2 = 0$ с точностью: а) 10^{-3}; б) 10^{-6}; в) 10^{-9}?

7. С помощью циклических вычислений по методу хорд в Excel найти корни уравнения $(2x)^2 + e^{-x} - 9 = 0$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

8. Методом Ньютона в EXCEL и MathCAD определить наименьший корень уравнения $\sin^3(2x) + e^{-2x}=0$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$. Сравнить результаты.

9. Определить количество итерационных шагов при уточнении корня уравнения $x^3 - 1{,}75x + 0{,}75 = 0$ на отрезках: а) [–1; 0]; б) [0,5; 1,2]; в) [1,2; 4] по методу Ньютона в MathCAD.

10. Найти корень уравнения $2x + 6^x = 0$ с точностью $\varepsilon=0{,}0001$ методом простой итерации в EXCEL и MathCAD. Сравнить результаты.

11. Обосновать сходимость и определить необходимое число итерационных шагов метода простой итерации решения уравнений с точностью $\varepsilon = 0{,}001$ на отрезке [1; 2]:

а) $\ln(x) = \cos(x)$; б) $e^{-\frac{x^2}{4}} = 2x - x^2$ в) $xe^x = 3$.

12. Определить корень уравнения $e^{2\cdot\sin(x)} = x$ на отрезке [2,5; 3] с точностью $\varepsilon = 0{,}0001$. Работу выполнить в MathCAD методами: бисекции, хорд, касательных, простой итерации. Сравнить результаты и по числу итераций определить наиболее экономичный метод решения.

13. Через автоматические средства поиска решения найти корни уравнений: а)$2^x+5x-3=0$; б) $\mathrm{arctg}(x) + \dfrac{1}{3\cdot x^3} = 0$; в) $(x-3)\cdot\cos(x) = 1$, предварительно отделив их графически.

14. Средствами MathCAD решить следующие уравнения:
а) $x^4 - x^2 - 10 = 0$; б) $3x^4 - 8x^3 - 8x^2 + 2 = 0$; в) $(x-1)^2 \cdot \ln(x+1) = 1$.

15. Через встроенные функции EXCEL и MathCAD решить уравнение $x^4 - x^3 - 1 = 0$. Сравнить результаты.

16. Дано уравнение $1{,}73x^3 + bx - 3{,}124 = 0$. Проследить динамику изменения корня уравнения в зависимости от изменения параметра b на отрезке [0; 5], показать её графически. Расчёты производить с точностью до трёх цифр после запятой.

3. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие методы решения уравнений вам известны? В чём их различия?

2. Какие условия должны выполняться для существования единственного корня на отрезке [a; b]?

3. Из каких этапов состоит задача приближённого решения уравнения?

4. Назовите способы отделения корней уравнения. В чём их различия?
5. В чем суть итерационного процесса? Какие итерационные процессы вы знаете?
6. В чем сущность метода половинного деления? Условие окончания итерационного процесса. Что берётся в качестве корня?
7. В чем сущность метода хорд? Как вид функции $f(x)$ приведенного уравнения $f(x) = 0$ влияет на ход его решения?
8. Условие окончания итерационного процесса в методе хорд.
9. В чем сущность метода Ньютона?
10. Как выбрать начальное приближение для метода Ньютона? Влияет ли оно на сходимость метода Ньютона?
11. Условие окончания итерационного процесса метода Ньютона.
12. Что влияет на скорость сходимости итерационного процесса?
13. В чем сущность метода простой итерации?
14. Сформулируйте достаточные условия сходимости метода простой итерации.
15. Когда можно прекратить вычисления по методу простой итерации?
16. Какие средства Excel можно задействовать для решения уравнений?
17. Какие функции и средства MathCAD можно задействовать для решения уравнений?

4. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задание 1.

1. Отделить хотя бы один из корней уравнения и уточнить его в Excel методом деления отрезка пополам, методом хорд и касательных с погрешностью, не превышающей $\varepsilon = 0{,}00001$.
2. Методом простых итераций уточнить отделённый корень с заданной точностью, проведя предварительное исследование сходимости процесса.
3. Организовать в Excel циклические ссылки для уточнения отделённого корня по методу хорд, касательных и простых итераций с заданной точностью.
4. Решить уравнения в Excel через диалоговые окна “Подбор параметра” и “Поиск решения”.
5. Сравнить полученные результаты.

№ вар-та	$f(x) = 0$	№ вар-та	$f(x) = 0$
1	$x^2 \cdot \text{arctg}\, x - 1 = 0.$	2	$2^x = 2 - x.$
3	$2 \cdot x - \ln x - 4 = 0.$	4	$5^x = 4 - x^2.$
5	$e^x + e^{-3x} - 4 = 0.$	6	$2^x + 5 \cdot x - 3 = 0.$
7	$x \cdot \cos x + 4 \cdot \ln x + 2 = 0.$	8	$6^x - 1 = -2x.$
9	$x^3 = (3)^x + 1.$	10	$2^x = 1 + \dfrac{1}{x}.$
11	$0{,}5^x = (x - 2)^2.$	12	$10^x = \sqrt{x-2}.$
13	$5^x - 3 \cdot x = 0.$	14	$3^x = (x+1)^2.$
15	$(x-1)^2 - \lg(x+1) = 0.$	16	$4^{0{,}5x - 1} = -1 - x.$

Задание 2. В MathCAD графически отделить один из корней уравнения f(x)=0 и уточнить его с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$: с помощью встроенной функции ***root***, методом деления отрезка пополам, методом хорд, методом Ньютона (касательных), методом простых итераций. Сравнить результаты, определить число итераций для каждого метода и сделать вывод о том, какой из методов более эффективный.

№ вар-та	$f(x) = 0$	№ вар-та	$f(x) = 0$
1	$\sqrt{1-x} - \text{tg}(x) = 0.$	2	$0{,}25x^3 + x - 2 = 0.$
3	$\cos\left(\dfrac{2}{x}\right) - 2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x} = 0.$	4	$\arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right) - x = 0.$
5	$\arccos(x) - \sqrt{1 - 0{,}3x^3} = 0.$	6	$3x - 4\ln(x) - 5 = 0.$
7	$\sqrt{1 - 0{,}4x^2} - \arcsin(x) = 0.$	8	$e^x - e^{-x} - 2 = 0.$
9	$3x - 14 + e^x - e^{-x} = 0.$	10	$e^{x-1} - x^3 - x = 0.$
11	$\sqrt{2x^2 + 1{,}2 - \cos(x)} - 1 = 0.$	12	$1 - x + \sin(x) - \ln(1 + x) = 0.$
13	$x - (3 + \sin(3{,}6 \cdot x))^{-1} = 0.$	14	$x^5 - x - 0{,}2 = 0.$
15	$0{,}1 \cdot x^2 - x\ln(x) = 0.$	16	$\sin(x + \pi) - 0{,}5x = 0.$

Задание 3. Решить уравнение $f(x) = 0$ символьно и с помощью функции ***polyroots***.

№ вар-та	$f(x) = 0$
1	$x^4 - 20x^3 + x^2 - 12x + 2 = 0.$
2	$x^4 + 60x^3 + x^2 - 4x - 6 = 0.$
3	$x^4 - 14x^2 - 4x - 75 = 0.$
4	$x^4 - x^3 + x^2 - 11x + 1 = 0.$
5	$x^4 - x^3 - 29x^2 - 71x - 14 = 0.$
6	$x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 13x - 3 = 0.$
7	$x^4 + 3x^3 - 23x^2 - 52x - 15 = 0.$
8	$x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 10x + 75 = 0.$
9	$x^4 + x^3 - 17x^2 - 45x - 10 = 0.$
10	$x^4 - 5x^3 + x^2 - 15x + 50 = 0.$
11	$x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 20x + 25 = 0.$
12	$x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x - 20 = 0.$
13	$x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 5x + 10 = 0.$
14	$x^4 + 10x^3 + 36x^2 + 7x + 75 = 0.$
15	$x^4 + 9x^3 + 31x^2 + 59x + 60 = 0.$
16	$x^4 + 3x^3 + 21x^2 + 5x + 43 = 0.$