МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И КАДРОВ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»

Т.Б. Воронкова, С.В. Курзенков

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Лекции и задания по учебной дисциплине

Горки
БГСХА
2023

ВВЕДЕНИЕ

Одним из важнейших этапов учебного процесса является самостоятельная работа студентов. Ее цель состоит в том, чтобы выработать прочные навыки работы с книгой, сформировать умение рационально организовывать свой умственный труд, способствовать лучшему усвоению теоретического материала и методов решения практических задач.

Предлагаемое учебно-методическое пособие содержит необходимый минимум программы курса теории вероятностей, достаточный для усвоения специальных дисциплин, преподаваемых в сельскохозяйственных вузах. Анализ решенных типовых примеров поможет правильно выбрать метод решения той или иной задачи по теории вероятностей.

Задачи, приведенные в пособии, разбиты по разделам и имеют широкий спектр применения в учебном процессе: для индивидуальных домашних заданий, для контрольных работ, для расчетно-графических заданий, а также для самостоятельной работы студентов. При их решении студенты должны показать уровень знаний соответствующих теоретических вопросов и методик, а также приобретенные в процессе аудиторных занятий навыки решения задач.

Данное издание является одной из составных частей организационно-методического обеспечения учебного процесса кафедры высшей математики и физики для студентов экономических специальностей.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Боровков, А. А. Теория вероятностей: учеб. пособие / А. А. Боровков.– М., 1986. – 432 с.

2. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. – М., 1988.

3. Чистяков, В. П. Курс теории вероятностей и математической статистики / В. П. Чистяков.– М., 1987. – 448 с.

4. Мацкевич, И. П. Теория вероятностей и математическая статистика / И. П. Мацкевич., Г. П. Свирид.– Минск: Вышэйш. шк., 1993. – 269 с.

5. Булдык, Г. М. Теория вероятностей и математическая статистика / Г. М. Булдык. – Минск: Вышэйш. шк., 1989. – 285 с.

6. Гусак, А. А. Высшая математика: в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2000. – Т. 2. – 434 с.

7. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М., 1972. – 368 с.

8. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М.,1979. – 400 с.

9. Лихолетов, И. И. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике / И. И. Лихолетов, И. П. Мацкевич. – Минск: Вышэйш. шк., 1976. – 454 с.

10. Гурский, Е. И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике / Е. И. Гурский. – Минск: Вышэйш. шк., 1984. – 339 с.
11. Мацкевич, И. П. Сборник задач и упражнений. Теория вероятностей и математическая статистика / И. П. Мацкевич, Г. П. Свирид, Г. М. Булдык. – Минск: Вышэйш. шк., 1996. – 318 с.

1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1. Предмет теории вероятностей. Исторический аспект

Теория вероятностей, подобно другим математическим наукам, развивалась из потребностей практики. Человек в своей деятельности часто встречается со случайными явлениями, которые при дублировании эксперимента протекают каждый раз иначе. Как бы точно не были фиксированы условия эксперимента, невозможно достигнуть того, чтобы при его повторении результаты полностью и в точности совпадали. Элемент неопределенности, многопричинности, присущий случайным явлениям, требует специальных методов для их изучения.

Итак, теория вероятностей изучает закономерности массовых случайных явлений.

Задачи, относящиеся к случайным явлениям, решались еще в начале XVII в. Так, Галилео Галилей пытался подвергнуть научному исследованию ошибки физических измерений, рассматривая их как случайные и оценивая их вероятности. К началу XVII в. относятся и первые попытки создания теории страхования, основанной на анализе закономерностей при изучении несчастных случаев.

В середине XVII в. Б. Паскаль, П. Ферма, Х. Гюйгенс заложили основы классической теории вероятностей, изучая ход различных игровых ситуаций. В своих работах они использовали только понятия вероятности и математического ожидания случайной величины. А уже в начале XVIII в. Я. Бернулли сформулировал понятие вероятности случайного события как отношение числа благоприятствующих ему шансов к числу всех возможных. В 1812 г. П. Лаплас строго определил вероятность случайного события, ввел требование равновероятности всех шансов (случаев). Для решения возникающих позже задач требовался новый аппарат, построенный на использовании понятия меры множества. Первые идеи этого были высказаны в работах Э. Бореля, А. Ломницкого, Р. Мизеса.

Первая попытка определить случайную величину как функцию была сделана С. Пуассоном в XIX в. Понятие функции распределения введено А. М. Ляпуновым в 1900 г. в его трактате о центральной предельной теореме. Построение теории вероятностей на теоретико-множественной основе было изложено в 1933 г. А. Н. Колмогоровым в работе «Основные понятия теории вероятностей». Это дало начало развитию теории вероятностей как строго математической науке.

Большой вклад в развитие теории вероятностей внесли русские математики: П. Л. Чебышев, А. А. Марков, А. М. Ляпунов. Математики советского времени С. Н. Берштейн, А. Я. Хинчин, А. Н. Колмогоров, Б. В. Гнеденко А. В. Скороход и другие укрепили приоритет русской школы теории вероятностей.

В настоящее время теория вероятностей широко развивается и от нее отмежевались ряд математических дисциплин: математическая статистика, теория случайных процессов, теория массового обслуживания, теория игр, теория надежности, теория информации.

1.2. Виды событий. Пространство элементарных событий

Исходными понятиями теории вероятностей являются: *испытание, событие, вероятность события.*

Испытанием, или стохастическим экспериментом, называется эксперимент, результаты которого нельзя предугадать заранее.

Любой фиксированный результат испытания называется *событием.*

Все события делятся на *достоверные, невозможные* и *случайные.*

Событие, которое всегда происходит в результате испытания называется *достоверным.* Событие, которое никогда не произойдет, называется *невозможным*. Событие, которое может произойти или может не произойти в результате эксперимента, называется *случайным.*

Пример 1. Испытание: вынимается шар из урны с красными и синими шарами. В результате испытания происходят следующие *события*:

A – вынули красный шар, случайное событие;

B – вынули цветной шар, достоверное событие;

C – вынули белый шар, невозможное событие.

Рассмотрим некоторые виды случайных событий.

Случайные события называются *несовместными*, если появление одного события исключает появление другого.

События называются *единственно возможными*, если в результате испытания одно из них обязательно наступает.

Совокупность несовместных и единственно возможных событий образует *полную группу* событий испытания.

Пример 2. Высаживаются 5 зерен некоторого растения и испытываются на всхожесть. Результатом испытания могут быть события:

A_0 – взошло 0 зерен; A_1 – взошло 1 зерно; A_2 – взошли 2 зерна, A_3 – взошли 3 зерна; A_4 – взошли 4 зерна; A_5 – взошли 5 зерен.

События A_0, A_1, …, A_5 являются попарно несовместными и единственно возможными. Следовательно, по определению они образуют полную группу событий.

Событие $\overline{A}$, состоящее в непоявлении события A, называется *противоположным*.

События A, $\overline{A}$ являются несовместными и единственно возможными, т. е. представляют простейший пример полной группы событий.

События называются *равновозможными,* если ни одно из них не является более возможным, чем остальные.

Множество всех несовместных, единственно возможных и равновозможных событий испытания, называемых элементарными событиями (исходами), образует *пространство элементарных событий* Ω .

Пример 3. Монету бросают дважды. Пространством элементарных событий этого испытания является множество: Ω ={ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ}, где Г – выпадение герба при подбрасывании монеты, Ц – выпадение цифры.

Пример 4. Бросают шестигранную игральную кость, на которой выбиты очки от 1 до 6. Элементарный исход – число выпавших очков. Тогда Ω ={1, 2, 3, 4, 5, 6 }.

Любое случайное событие *A* есть подмножество множества Ω , т. е. $A \subset \Omega$. Достоверное событие, состоящее из всех элементарных исходов, и есть само множество Ω . Невозможное событие не содержит ни одного элементарного события и является пустым подмножеством $\varnothing$.

1.3. Элементы комбинаторики

Комбинаторика – это раздел математики, изучающий расположение объектов в соответствии со специальными правилами и методы подсчета числа всех этих расположений. Комбинаторика является разделом теории множеств. Она широко применяется в теории информации, изучающей методы оптимального кодирования, декодирования и передачи информации.

Основной принцип комбинаторики (правило умножения). Если некоторый выбор A можно осуществить m различными способами и для каждого из них другой выбор B можно осуществить k различными способами, то выбор A и B осуществляется $m \cdot n$ способами.

Пример 1. Из города A в город B ведут 3 дороги, из города B в город C – 4 дороги. Сколько различных путей существует из города А в город C?

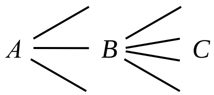


Рис. 1

Решение. По основному принципу комбинаторики число дорог из города A в город C равно: $3 \cdot 4 = 12$ (рис. 1).

Основной принцип комбинаторики в общем виде. Пусть требуется выполнить одно за другим k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе – n_2 способами и т. д., последнее – n_k способами, то все k действий могут быть выполнены $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ способами.

Пример 2. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если ни одна из цифр в числе не повторяется.

Решение. Получаем $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ чисел, так как первую цифру можно выбрать из 5 цифр, исключая 0, вторую – из оставшихся 5 цифр, третью – из оставшихся 4 цифр и четвертую – из 3 цифр.

Ответ: 300.

Правило сложения. Пусть требуется выполнить хотя бы одно из k несовместных действий. Первое действие можно выполнить n_1 способами, второе – n_2 способами и т. д., последнее – n_k способами. Тогда хотя бы одно из k действий может быть выполнено $n_1 + n_2 + ... + n_k$ способами.

Сочетания. Имеется множество n различных элементов. Произвольное подмножество k различных элементов из данных n называется *сочетанием из n элементов по k элементов*.

Например, имеется множество из 4 элементов $\{a, b, c, d\}$. Тогда $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$ – все возможные сочетания из 4 данных элементов по 2.

Число сочетаний из n элементов по k равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}, \text{ где } n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n, \ 0! = 1.$$

Пример 3. Сколькими способами можно составить комиссию в составе 3 человек, выбирая их из 4 супружеских пар, если в комиссию могут входить любые 3 из 8 человек?

Решение. В этом случае число всех возможных комиссий равно $C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5!} = 56.$ Ответ: 56.

Пример 4. Имеется 8 различных конфет. Сколькими способами можно составить из них наборы, если в каждом наборе должно быть четное число конфет?

Решение. Используем правило сложения и понятие сочетания. Тогда число наборов конфет равно $C_8^2 + C_8^4 + C_8^6 + C_8^8 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} + \frac{8!}{4! \cdot 4!} +$

$+ \frac{8!}{6! \cdot 2!} + \frac{8!}{8! \cdot 0!} = 28 + 70 + 28 + 1 = 127.$ Ответ: 127.

Упорядоченные множества. Перестановки. Множество из n элементов является упорядоченным, если каждому элементу множества поставлен в соответствие номер – число от 1 до n. Упорядоченные множества считаются различными, если они отличаются или своими элементами, или порядком элементов.

Пусть имеется n различных элементов. Различные упорядоченные множества из этих элементов, которые отличаются лишь порядком элементов, называются *перестановками из n элементов.*

Число перестановок из n элементов равно $P_n = n!$.

Пример 5. Сколько восьмизначных чисел можно составить из 8 цифр $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ так, чтобы четная цифра имела четный номер.

Решение. Четные числа можно расставить на места с четными номерами 4! = 24 способами, на оставшиеся 4 места можно расставить нечетные числа также 4! = 24 способами. Поэтому по правилу умножения количество чисел равно $4! \cdot 4! = 24 \cdot 24 = 576.$ Ответ: 576.

Размещения. Имеется множество n различных элементов. Упорядоченное подмножество k различных элементов из данных n называется *размещением из n элементов по k элементов*. Различные размещения из n по k отличаются или элементами, или их порядком.

Число размещений из n элементов по k равно

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1).$$

Пример 6. Сколько существует номеров телефонов, состоящих из 6 различных цифр.

Решение. Число таких номеров равно $9\cdot A_9^5 = 9\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 =$ $=$ 136 080, так как первую цифру выбираем из всех цифр, кроме 0, а остальные цифры – из оставшихся 9 цифр. Ответ: 136 080.

1.4. Классическое определение вероятности события

Рассмотрим испытание с конечным числом n элементарных исходов.

Классическое определение вероятности. Вероятностью события A называется отношение числа элементарных исходов m, благоприятствующих его появлению, к общему числу n элементарных исходов испытания: $P(A) = \dfrac{m}{n}$.

Пример 1. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков не больше 6?

Решение. Пространство Ω состоит из $n = 36$ элементарных исходов и имеет следующий вид (рис. 2):

1+1	1+2	1+3	1+4	1+5	1+6
2+1	2+2	2+3	2+4	2+5	2+6
3+1	3+2	3+3	3+4	3+5	3+6
4+1	4+2	4+3	4+4	4+5	4+6
5+1	5+2	5+3	5+4	5+5	5+6
6+1	6+2	6+3	6+4	6+5	6+6

Рис.2

Событие A, состоявшее в том, что сумма выпавших очков не больше 6, имеет следующий вид: $A=\{1+1,\ 1+2,\ 1+3,\ 1+4,\ 1+5,\ 2+1,\ 2+2,\ 2+3,\ 2+4,\ 3+1,\ 3+2,\ 3+3,\ 4+1,\ 4+2,\ 5+1\}$ и включает m = 15 элементарных исходов.

Тогда вероятность события $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$. Ответ: $\dfrac{5}{12}$.

Пример 2. В студенческой группе 12 учащихся, из которых 7 отличников. Наудачу выбирают 5 человек. Какова вероятность того, что среди них 3 отличника?

Решение. Число всех элементарных исходов испытания равно числу сочетаний из 12 элементов по 5:

$$n = C_{12}^{5} = \frac{12!}{5!\cdot 7!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{7!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 792.$$

Число исходов, благоприятствующих событию A, найдем, используя правило умножения и понятие сочетания:

$$m = C_7^3 \cdot C_5^2 = \frac{7!}{3!\cdot 4!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!} = 35\cdot 10 = 350.$$

Тогда вероятность события $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{350}{792} \approx 0,44.$ Ответ: 0,44.

1.5. Относительная частота случайного события. Статистическая вероятность

Пусть событие A наблюдается в некотором опыте. Повторим испытание n раз и обозначим m число опытов, в которых появилось событие A.

Относительной частотой события A называется отношение числа опытов, в которых появилось событие A, к общему числу проведенных опытов: $W(A) = \frac{m}{n}$.

Относительная частота может быть вычислена после проведения серии испытаний и изменяется, если проводится другая серия этих же опытов. Однако, как показывает опыт, при достаточно больших n частота перестает колебаться и сохраняет практически постоянную величину.

Рассмотрим классический опыт с подбрасыванием монеты, относительная частота появления герба в длинных сериях таких экспериментов мало отличалась от 0,5. В приведенной ниже таблице даны результаты трех серий опытов бросания монеты.

Экспериментаторы	Число бросаний монеты	Число появления герба	Относительная частота
Ж. Бюффон	4 040	2 048	0,5080
К. Пирсон	12 000	6 019	0,5016
К. Пирсон	24 000	12 012	0,5005

Таким образом, при увеличении числа опытов относительная частота обладает свойством устойчивости и мало чем отличается от некоторого фиксированного значения, которое является статистической вероятностью события A, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} W(A) = P(A)$.

1.6. Действия над событиями. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Суммой двух событий A и B называется событие $A + B$ (A или B), состоящее в появлении хотя бы одного из данных событий. Сумма событий состоит из элементарных исходов, входящих как в множество A, так и в множество B (рис. 3).

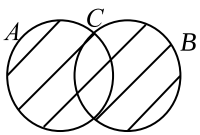


Рис. 3

Аналогично, сумма любого числа событий есть событие, состоящее в появлении хотя бы одного из данных событий $A_1, A_2, \ldots$.

Произведением (пересечением) двух событий A и B называется событие $A \cdot B$ (A и B), состоящее в их совместном появлении.

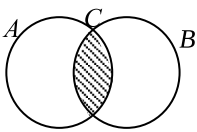


Рис. 4

Произведение событий A и B состоит из элементарных исходов, входящих в оба множества (рис. 4).

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Следствия:

1. Вероятность суммы попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

2. Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице: $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$.

3. Вероятность противоположного события $\overline{A}$ равна разности между единицей и вероятностью события A: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Теорема сложения. Вероятность суммы событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Условной вероятностью события B называется его вероятность, вычисленная в предположении, что событие A уже произошло, и обозначается $P(B/A)$.

Теорема умножения. Вероятность совместного появления событий равна произведения вероятности одного события на условную вероятность другого: $P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B)$.

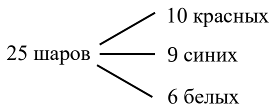
Для n событий вероятность их совместного появления равна

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot\ldots\cdot P(A_n/A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_{n-1}).$$

Пример 1. В урне находится 10 красных, 9 синих и 6 белых шаров. Достают наудачу 2 шара. Какова вероятность того, что вынутые шары будут одного цвета.

Решение. Запишем условие задачи в виде схемы

Обозначим события:



A_1 – первый вынутый шар красный;

A_2 – второй вынутый шар красный;

B_1 – первый вынутый шар синий;

B_2 – второй вынутый шар синий;

C_1 – первый вынутый шар белый;

C_2 – второй вынутый шар белый.

Тогда событие A – оба вынутых шара одного цвета, – можно записать как: $A=A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2$. Используя теорему сложения несовместных событий и теорему умножения, получим:

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)+P(B_1)\cdot P(B_2/B_1)+P(C_1)\cdot P(C_2/C_1),$$

$$P(A)=\frac{10}{25}\cdot\frac{9}{24}+\frac{9}{25}\cdot\frac{8}{24}+\frac{6}{25}\cdot\frac{5}{24}=0,32.$$ Ответ: 0,32.

Событие A и B называются *независимыми*, если появление одного из них не изменяет вероятность другого. В этом случае $P(B/A)=P(B)$ и $P(A/B)=P(A)$. Для независимых событий теорема умножения имеет следующий вид: $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$. Для n независимых в совокупности событий

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n).$$

Пример 2. Три спортсмена выполняют норму мастера спорта. Вероятность выполнить эту норму для первого спортсмена равна 0,7; для второго – 0,85; для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что норма мастера будет выполнена двумя спортсменами.

Решение. Обозначим события:

A_1 – первый спортсмен выполнит норму мастера;

A_2 – второй спортсмен выполнит норму мастера;

A_3 – третий спортсмен выполнит норму мастера.

Запишем вероятности: $P(A_1)=0,7$; $P(A_2)=0,85$; $P(A_3)=0,8$. Вычислим вероятности противоположных событий:

$$P(\overline{A_1})=1-0,7=0,3\,;\; P(\overline{A_2})=1-0,85=0,15;\; P(\overline{A_3})=1-0,8=0,2\,.$$

Запишем событие B – норма мастера будет выполнена двумя спортсменами: $B=A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3$.

Используя теорему сложения несовместных событий и теорему умножения для независимых событий, получим:

$$P(B)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A_3})+P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(A_3)+P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)\cdot P(A_3),$$

$$P(B)=0,7\cdot 0,85\cdot 0,2+0,7\cdot 0,15\cdot 0,8+0,3\cdot 0,85\cdot 0,8=0,407\,.$$

Ответ: 0,407.

Вероятность появления хотя бы одного из n независимых событий. Заданы вероятности появления каждого из n независимых в совокупности событий: $P(A_1)=p_1$, $P(A_2)=p_2$, … , $P(A_n)=p_n$. Запишем вероятности противоположных событий:

$$P(\overline{A_1})=1-p_1=q_1\,,\; P(\overline{A_2})=1-p_2=q_2\,,\;\ldots\,,\; P(\overline{A_n})=1-p_n=q_n\,.$$

Событие C появления хотя бы одного из n независимых событий противоположно событию не появления всех. Поэтому вероятность появления хотя бы одного из n независимых событий равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий: $P(C)=1-q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_n$.

Для примера 2 вероятность выполнить норму хотя бы одним спортсменом равна $P(C)=1-0,3\cdot 0,15\cdot 0,2=1-0,009=0,991$.

1.7. Формула полной вероятности. Формулы Байесса

Пусть события H_1, H_2, …, H_n образуют полную группу событий и появляются с заданными вероятностями. Эти события называются гипотезами. Событие A может появляться с одной из этих гипотез с вероятностями $P(A/H_1)$, $P(A/H_2)$, …, $P(A/H_n)$. Запишем событие $A = = H_1 \cdot A + H_2 \cdot A + \ldots + H_n \cdot A$ и получим формулу полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A/H_n).$$

После появления события A вероятности гипотез вычисляются по формулам Байесса:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)}, \; i = \overline{1, n}.$$

Пример. В канцелярии работают 3 секретаря, которые отправляют 40, 35 и 25 % исходящей корреспонденции соответственно. Вероятности неверной адресации бумаг соответственно равны 0,03; 0,04 и 0,06. Найти вероятность того, что неверно адресованный документ отправлен третьим секретарем.

Решение. Обозначим гипотезы:

H_1 – документ отправлен первым секретарем;

H_2 – документ отправлен вторым секретарем;

H_3– документ отправлен третьим секретарем.

Запишем вероятности:

$$P(H_1) = 0,4; \;\; P(H_2) = 0,35; \;\; P(H_3) = 0,25; \;\; P(A/H_1) = 0,03;$$

$$P(A/H_2) = 0,04; \;\; P(A/H_3) = 0,06.$$

Вычислим вероятность неверной адресации документа по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3)$$

или $P(A) = 0,4 \cdot 0,03 + 0,35 \cdot 0,04 + 0,25 \cdot 0,06 = 0,041$.

Итак, 4,1 % исходящей корреспонденции канцелярии адресуется неверно.

Тогда искомую вероятность найдем по формуле Байесса:

$$P(H_3 / A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{0,25 \cdot 0,06}{0,041} \approx 0,37.$$

Итак, 37 % неверно адресованных документов отправляется третьим секретарем. Ответ: 0,37.

1.8. Повторные испытания. Формула Бернулли

Пусть проводится n повторных испытаний, каждое из которых имеет два независимых исхода: появление или непоявление события A

с вероятностями $P(A)=p$ и $P(\overline{A})=1-p=q$. Описанная схема повторных испытаний называется схемой Бернулли.

Событие A в n испытаниях может появляться $0, 1, 2, ..., n$ раз. Вероятность того, что событие A в n испытаниях появилось ровно k раз, вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(k)=C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \text{ где } C_n^k=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

Наивероятнейшее число m появления события A в n испытаниях находится из неравенства $np-q \le m \le np+p$.

Пример. Всхожесть семян риса составляет 80 %. Найти вероятность того, что из 5 высаженных семян взойдут: 1) ровно 4 зерна; 2) не менее 4 зерен; 3) найти наивероятнейшее число взошедших семян.

Решение: Запишем кратко условие задачи: $n=5; p=0,8;$ $q=1-0,8=0,2$.

1. Вероятность того, что из 5 семян взойдет ровно 4, равна

$$P_5(4)=C_5^4 \cdot p^4 \cdot q^1=\frac{5!}{4!\cdot 1!}\cdot 0,8^4 \cdot 0,2=5\cdot 0,4096\cdot 0,2=0,4096\approx 0,41.$$

2. Вероятность того, что из 5 семян взойдет не менее 4, равна

$$P_5(k\ge 4)=P_5(4)+P_5(5)=0,4096+C_5^5\cdot p^5\cdot q^0=0,4096+\frac{5!}{5!\cdot 0!}\cdot 0,8^5\cdot 1=$$

$$=0,4096+0,32768=0,73728\approx 0,74.$$

3. Наивероятнейшее число взошедших семян риса найдем из неравенства

$$np-q\le m\le np+p \Rightarrow 5\cdot 0,8-0,2\le m\le 5\cdot 0,8+0,8 \Rightarrow 3,8\le m\le 4,8.$$

Таким образом, наивероятнейшее число взошедших семян $m=4$, а вероятность $P_5(4)=0,41$ является наибольшей из вероятностей $P_n(k)$.

Ответ: 0,41; 0,74; 4.

1.9. Асимптотические формулы Лапласа

В случае достаточно большого числа испытаний в схеме Бернулли используют локальную и интегральную формулы Лапласа.

Локальная формула Лапласа. Вероятность появления события A ровно k раз в n испытаниях приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \text{ где } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ даны в приложении 1 данного пособия для положительных значений аргумента, с учетом четности этой функции $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Пример 1. Монета брошена 60 раз. Найти вероятность выпадения герба ровно 28 раз.

Решение. Запишем кратко условие задачи: n=60; k=28; p=0,5; q=0,5.

Тогда $P_{60}(30) \approx \frac{1}{\sqrt{60 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} \cdot \varphi(x)$,

где $x = \frac{28 - 60 \cdot 0,5}{\sqrt{60 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} \approx -\frac{2}{3,87} \approx -0,52$. Из таблицы найдем

$$\varphi(-0,52) = \varphi(0,52) = 0,3485.$$

Тогда $P_{60}(30) \approx \frac{1}{\sqrt{60 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} \cdot 0,3485 \approx \frac{1}{3,87} \cdot 0,3485 \approx 0,09.$

Ответ: 0,09.

Интегральная формула Лапласа. Вероятность появления события A от k_1 до k_2 раз в n испытаниях приближенно равна

$$P_n(k_1;\ k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ где } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}},\ x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значения функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ даны в прил. 2 для положительных значений аргумента, с учетом нечетности этой функции $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Пример 2. Высажено 500 деревьев, приживаемость которых 75 %. Найти вероятность того, что приживется не менее 370 деревьев.

Решение. Запишем кратко условие задачи: $n = 500; k_1 = 370;$ $k_2 = 500;\ p = 0,75; q = 0,25.$

Тогда $P_{500}(350;500) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,

где $x_2 = \dfrac{500 - 500 \cdot 0,75}{\sqrt{500 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} \approx \dfrac{125}{9,68} \approx 12,91$;

$$x_1 = \frac{370 - 500 \cdot 0,75}{\sqrt{500 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} \approx -\frac{5}{9,68} \approx -0,52.$$

Тогда $P_{500}(370;500) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(12,91) - \Phi(-0,52) \approx$ $\approx 0,5 + 0,1985 = 0,6985 \approx 69,9\ \%$. Ответ: 69,9 %.

1.10. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности

Пусть событие A появилось ровно m раз в n испытаниях. Тогда относительная частота появления A равна $\dfrac{m}{n}$. Вероятность отклонения ε относительной частоты от постоянной вероятности p появления события A в каждом испытании вычисляется по формуле

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Пример 1. По нормативу станок производит 85 % стандартных деталей. Оценить с вероятностью 99 % количество стандартных деталей из 600 деталей, произведенных на станке.

Решение. Воспользуемся формулой

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right), \text{ где } n = 600, p = 0,85; q = 0,15.$$

Имеем: $2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right) = 0,99 \Rightarrow \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right) = 0,495 \Rightarrow \varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}} = 2,58 \Rightarrow$

$$\varepsilon = 2,58\sqrt{\frac{0,85 \cdot 0,15}{600}} \approx 0,038.$$

Из неравенства получаем:

$$\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<\frac{m}{n}-p<\varepsilon \Rightarrow np-\varepsilon n<m<np+\varepsilon n.$$

Подставляем исходные данные:

$$600\cdot 0{,}85-0{,}038\cdot 600<m<600\cdot 0{,}85+600\cdot 0{,}038\Rightarrow$$

$$510-23<m<510+23\Rightarrow 487<m<533.$$

Таким образом, в 99 % случаев на станке будет произведено от 487 до 533 стандартных деталей.

1.11. Формула Пуассона. Простейший поток событий

При большем числе испытаний и в случае редкого появления события A, но при постоянном значении $\lambda = np$ справедлива формула Пуассона $P_n(k)\approx \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$.

Значения вероятности $P_n(k)$ приведены в прил. 3.

Пример 1. На ферме 2 % коров дают среднегодовые надои свыше 6 000 кг. Какова вероятность того, что из 350 коров не менее 5 коров дадут более 6 000 кг молока за год?

Решение. Запишем кратко условие задачи: $n=350; k\ge 5; p=2\,\%=$ $=0{,}02\Rightarrow \lambda=np=350\cdot 0{,}02=7.$

Тогда имеем:

$$P_{350}(k\ge 5)=1-P_{350}(k<5)=1-(0{,}0009+0{,}0064+0{,}0223+0{,}0521+$$
$$+\,0{,}0912)=1-0{,}1729=0{,}8271\approx 0{,}83.$$

Ответ: 0,83.

Потоком событий называется последовательность событий, наступающих в определенные моменты времени.

Поток событий называется простейшим или пуассоновским при выполнении условий:

1) стационарности, при котором вероятность $P_t(k)$ появления k событий за промежуток времени t зависит только от числа событий k и длительности t;

2) отсутствия последействия, при котором вероятность $P_t(k)$ не зависит от появления или непоявления событий за предыдущие промежутки времени;

3) ординарности, при котором появление более одного события за малый промежуток времени маловероятно.

Вероятность появления k событий за промежуток времени t вычисляется по формуле $P_t(k) \approx \dfrac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}$, где λ – интенсивность потока событий, т. е. среднее число событий в единицу времени.

Пример 2. Среднее число вызовов технической помощи в течение пятидневной рабочей недели равно 15. Найти вероятность того, что в течение 2 рабочих дней техпомощь будет вызываться не более 6 раз.

Решение. Вычислим интенсивность простейшего потока событий – вызовов технической помощи: $\lambda = \dfrac{15}{5} = 3.$ Запишем искомую вероятность: $P_2(k \le 6) = P_2(0) + P_2(1) + P_2(2) + P_2(3) + P_2(4) + P_2(5) + P_2(6).$

Для вычисления вероятностей $P_t(k) \approx \dfrac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}$ воспользуемся прил. 3 при $\lambda t = 3 \cdot 2 = 6,$ получим:

$$P_2(k \le 6) \approx 0,0025 + 0,0149 + 0,0446 + 0,0892 + 0,1339 + 0,1606 + 0,1606 =$$
$$= 0,6063 \approx 0,61.$$

Ответ: 0,61.

1.12. Случайные величины. Определение и виды случайных величин

Случайной величиной называется величина, которая в результате испытания принимает одно из возможных значений, заранее неизвестное и зависящее от случайных причин.

Примеры случайных величин. 1. Число взошедших семян из 7 высаженных является случайной величиной X_1, принимающей значения $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

2. Оценка студента на экзамене является случайной величиной X_2, принимающей значения $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

3. Урожайность зерновых культур в случайно выбранном хозяйстве является случайной величиной Y_1, принимающей значения из промежутка $(15;\ 50)$ центнеров с гектара.

4. Рост случайно выбранного взрослого человека в некотором регионе является случайной величиной Y_2, принимающей значения из промежутка $(140;\ 195)$ сантиметров.

Как видно из примеров, случайные величины X_1, X_2 принимают дискретное множество значений, а множество значений случайных величин Y_1, Y_2 непрерывно. В связи с этим различают дискретную и непрерывную случайные величины.

Дискретной случайной величиной называется величина, принимающая отдельные, изолированные значения, т. е. множество ее значений дискретное множество, конечное или счетное.

Непрерывной случайной величиной называется величина, принимающая все значения из конечного или бесконечного промежутка.

1.13. Закон распределения дискретной случайной величины

Законом распределения случайной величины называется соответствие между ее возможными значениями и их вероятностями.

Дискретную случайную величину можно задать *таблично, графически и аналитически*. При табличном задании случайной величины первая строка представляет собой значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по возрастанию, вторая строка – соответствующие вероятности этих значений $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Дискретная случайная величина принимает только одно из возможных значений, поэтому события $(X = x_1)$, $(X = x_2)$, …, $(X = x_n)$ образуют полную группу событий, и сумма их вероятностей $p_1 + p_2 + +\ldots+ p_n = 1$. При графическом задании дискретной случайной величины на координатную плоскость наносим точки $(x_1;\ p_1)$, $(x_2;\ p_2)$, …, $(x_n; p_n)$, и соединяем их отрезками, полученная фигура называется *многоугольником распределения*.

1.14. Примеры дискретных распределений

1. *Биномиальное распределение.* Пусть проводятся n повторных испытаний по схеме Бернулли. В результате каждого испытания появляется или не появляется событие A с вероятностями $P(A) = p$ $P(\overline{A}) = q$. Рассмотрим случайную величину X – число появления события A в n испытаниях. Случайная величина X принимает значения 0, 1, $\ldots, n$, вероятности которых можно вычислить по формуле Бернулли $P(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, где $k = \overline{0,\ n}.$

Сумма вероятностей представляет собой формулу бинома Ньютона:

$$p_0 + p_1 + \ldots + p_n = C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + \ldots + C_n^n p^n q^0 = \left(p+q\right)^n = 1^n = 1.$$

Поэтому это распределение называется биномиальное.

Пример 1. Составить закон распределения в табличном и графическом виде числа выпадения герба при пятикратном подбрасывании монеты.

Решение. Запишем кратко условие задачи: $n = 5$; $p = 0,5$; $q = 1 - 0,5= =0,5$. Случайная величина X – число выпадения герба, принимает значения 0, 1, 2, 3, 4, 5. Вычислим вероятности этих значений:

$$P(X=0)=P_5(0)=C_5^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=1\cdot 1\cdot\frac{1}{32}=\frac{1}{32}=0,03125;$$

$$P(X=1)=P_5(1)=C_5^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}=\frac{5}{32}=0,15625;$$

$$P(X=2)=P_5(2)=C_5^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=10\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}=\frac{10}{32}=0,3125;$$

$$P(X=3)=P_5(3)=C_5^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=10\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}=\frac{10}{32}=0,3125;$$

$$P(X=4)=P_5(4)=C_5^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1=5\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{32}=0,15625;$$

$$P(X=5)=P_5(5)=C_5^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0=1\cdot\frac{1}{32}\cdot 1=\frac{1}{32}=0,03125.$$

Контроль вычислений: $\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{10}{32}+\frac{10}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=1.$

Составим табличный закон распределения:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,03125	0,15625	0,3125	0,3125	0,15625	0,03125

Нанесем на координатную плоскость точки (0; 0,03125), (0; 0,15625), (0; 0,3125), (0; 0,3125), (0; 0,15625), (0; 0,03125) и построим многоугольник распределения случайной величины X (рис. 5).

2. *Гипергеометрическое распределение.* Пусть имеется N предметов двух видов: M предметов первого вида и $N - M$ предметов второго вида. Рассмотрим случайную величину X – число предметов первого вида из выбранных n предметов. Если число $n \le N$ и $n \le N - M$ тогда случайная величина X принимает значения 0, 1, ..., n. Вероятности этих значений вычисляются по формулам

$$P(X=k)=\frac{C_M^k\cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},\ \text{где}\ k=\overline{0,n}.$$

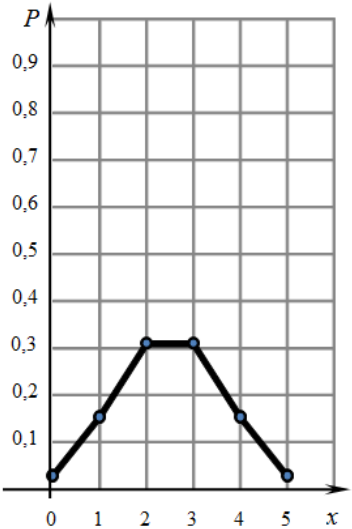


Рис. 5

Пример 2. В ящике находится 12 деталей, из которых 7 окрашенных. Составить в табличном виде закон распределения числа окрашенных деталей из выбранных 4 деталей.

Решение. Случайная величина X принимает значения 0, 1, 2, 3, 4.

Вычислим вероятности этих значений:

$$P(X=0)=\frac{C_7^0\cdot C_5^4}{C_{12}^4}=\frac{1\cdot 5}{495}=\frac{1}{99};$$

$$P(X=1)=\frac{C_7^1\cdot C_5^3}{C_{12}^4}=\frac{7\cdot 10}{495}=\frac{14}{99};$$

$$P(X=2)=\frac{C_7^2\cdot C_5^2}{C_{12}^4}=\frac{21\cdot 10}{495}=\frac{42}{99};$$

$$P(X=3)=\frac{C_7^3\cdot C_5^1}{C_{12}^4}=\frac{35\cdot 5}{495}=\frac{35}{99};$$

$$P(X=4)=\frac{C_7^4\cdot C_5^0}{C_{12}^4}=\frac{35\cdot 1}{495}=\frac{7}{99}.$$

Контроль вычислений: $\frac{1}{99}+\frac{14}{99}+\frac{42}{99}+\frac{35}{99}+\frac{7}{99}=1.$

Составим табличный закон распределения:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{99}$	$\frac{14}{99}$	$\frac{42}{99}$	$\frac{35}{99}$	$\frac{7}{99}$

3. *Геометрическое распределение.* Пусть проводятся повторные испытания по схеме Бернулли. В результате каждого испытания появляется или не появляется событие A с вероятностями $P(A)=p$, $P(\overline{A})=q$. Рассмотрим случайную величину X – число проведенных испытаний до появления события $\overline{A}$. Случайная величина X принимает счетное множество значений $1, 2, ..., k, ...,$ вероятности которых можно вычислить по формулам: $P(X=1)=q,\ P(X=2)=p\cdot q,\ \ldots,$

$P(X=k)=p^{k-1}\cdot q, \ldots$. Сумма этих вероятностей вычисляется как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$q+pq+p^2q+...+p^{k-1}q+...=\frac{q}{1-p}=\frac{q}{q}=1.$$

Пример 3. При подготовке к экзамену студенты в среднем успевают выучить 80 % учебного материала. Составить табличный закон распределения числа заданных преподавателем вопросов до первого неправильного ответа.

Решение. По условию событие A – правильный ответ на вопрос, событие $\overline{A}$ – неправильный ответ на вопрос:

$$P(A)=0,8\ ;\ P(\overline{A})=1-0,8=0,2.$$

Случайная величина X – число заданных вопросов до появления события $\overline{A}$, принимает счетное множество значений $1, 2, ..., k, ...$ Вычислим вероятности этих значений:

$$P\left(X=1\right)=0,2;\ P\left(X=2\right)=0,8\cdot 0,2=0,16; \ldots,\ P\left(X=k\right)=0,8^{k-1}\cdot 0,2;$$

$$\ldots.$$

Контроль вычислений:

$$0,2+0,8\cdot 0,2+0,8^2\cdot 0,2+...+0,8^{k-1}\cdot 0,2+...=\frac{0,2}{1-0,8}=\frac{0,2}{0,2}=1.$$

Составим табличный закон распределения:

X	1	2	…	k	…
P	0,2	0,16	…	$0,8^{k-1}\cdot 0,2$	…

1.15. Числовые характеристики дискретной случайной величины

К основным числовым характеристикам случайной величины относятся: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется постоянная величина, равная сумме произведений значений случайной величины на их соответствующие вероятности

$$M\left(X\right)=x_1\cdot p_1+x_2\cdot p_2+...+x_n\cdot p_n.$$

Проведем N опытов, в которых случайная величина X принимает m_1 раз значение x_1, m_2 раз значение x_2, …, m_n раз значение x_n. Найдем среднее значение случайной величины:

$$\overline{X} = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + ... + x_n \cdot m_n}{N} = x_1 \cdot \frac{m_1}{N} + x_2 \cdot \frac{m_2}{N} + ... + x_n \cdot \frac{m_n}{N} =$$
$$= x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + ... + x_n \cdot w_n ,$$

где $w_i = \frac{m_i}{N}$, $i = \overline{1,n}$ – относительная частота появления значения x_i.

При неограниченном увеличении числа опытов относительная частота стремится к вероятности соответствующего значения случайной величины. Поэтому среднее значение $\overline{X}$ приближается к математическому ожиданию $M(X)$. На основании этого сформулируем вероятностный смысл математического ожидания. Математическое ожидание случайной величины приближенно равно ее среднему значению.

Основные свойства математического ожидания:

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: $M(C) = C$.

2. Постоянную величину можно выносить за знак математического ожидания: $M(CX) = C \cdot M(X)$.

3. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин:
$$M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y).$$

4. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин:
$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y).$$

5. Если M – наибольшее значение случайной величины, m – наименьшее, то $m \le M(X) \le M$.

Однако математическое ожидание характеризует только центр распределения значений случайной величины и не оценивает степень рассеяния значений вокруг этого центра.

Отклонением случайной величины называется разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием. Отклонение – это случайная величина, имеющая распределение:

$X - M(X)$	$x_1 - M(X)$	$x_2 - M(X)$	…	$x_n - M(X)$
P	p_1	p_2	…	p_n

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения: $D(X)=M\left(X-M(X)\right)^2$.

Получим рабочую формулу для вычисления дисперсии:

$$D(X)=M\left(X-M(X)\right)^2=M\left(X^2-2X\cdot M(X)+M^2(X)\right)=$$

$$=M\left(X^2\right)-2M(X)\cdot M(X)+M^2(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X).$$

Итак, $D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X)$.

Основные свойства дисперсии:

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю: $D(C)=0$.

2. Постоянную величину можно выносить за знак дисперсии: $D(CX)=C^2\cdot D(X)$.

3. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин: $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$.

Для получения характеристики рассеяния значений вокруг математического ожидания в единицах измерения случайной величины извлечем корень квадратный из дисперсии.

Средним квадратическим отклонением случайной величины называется корень квадратный из ее дисперсии: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

Пример. Найти числовые характеристики дискретной случайной величины, заданной законом распределения:

X	-2	-1	3	6
P	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,1$

Решение: Математическое ожидание случайной величины равно

$$M(X)=-2\cdot 0,2-1\cdot 0,3+3\cdot 0,4+6\cdot 0,1=1,1.$$

Дисперсия равна $D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X)=(-2)^2\cdot 0,2+$

$$+(-1)^2\cdot 0,3+3^2\cdot 0,4+6^2\cdot 0,1-(1,1)^2=7,09.$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины равно $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{7,09}\approx 2,66.$

Ответ: $M(X)=1,1;\ D(X)=7,09;\ \sigma(X)\approx 2,66.$

Найдем числовые характеристики числа появления события A в n независимых испытаниях. Рассмотрим n независимых случайных величин X_1, X_2, …, X_n, равных числу появления события A в 1, 2, …, n-м единичных испытаниях. Случайные величины имеют один и тот же закон распределения:

X_i	0	1
P	q	p

и числовые характеристики: $M(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p,$

$$D(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p - p^2 = p - p^2 = p \cdot (1-p) = pq,\ i = \overline{1,n}.$$

Число появления события A в n испытаниях состоит из суммы числа появления этого события в каждом испытании: $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. На основании свойств математического ожидания и дисперсии имеем:

$$M(X) = p + p + \ldots + p = np,\ D(X) = pq + pq + \ldots + pq = npq.$$

Итак, числовые характеристики числа появления события A в n независимых испытаниях равны $M(X) = np,\ D(X) = npq.$

1.16. Функция распределения случайной величины

Функцией распределения случайной величины X называется вероятность события, что в результате испытания случайная величина примет значение, меньшее x: $F(x) = P(X < x)$, при $x \in (-\infty, +\infty)$.

Геометрически это означает, что функция распределения задает вероятность попадания случайной величины в промежуток, расположенный на числовой оси левее точки x.

Свойства функции распределения $F(x)$:

1. Функция распределения $F(x) \in [0;1]$.
2. Функция распределения $F(x)$ является неубывающей функцией.
3. Вероятность попадания случайной величины в интервал равна

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

4. $F(-\infty) = 0,\ F(+\infty) = 1.$
5. Если случайная величина $X \in [a;b]$, то при $x \le a$, $F(x) = 0$, а при $x > b$, $F(x) = 1$.

Функция распределения *дискретной* случайной величины X является кусочно-непрерывной функцией и имеет конечное или счетное число точек разрыва I рода, число которых равно числу значений случайной величины, величина скачка $\Delta F(x_0) = F(x_0 + 0) - F(x_0)$. Причем функция распределения непрерывна слева: $F(x_0 - 0) = F(x_0)$.

Пример. Задана дискретная случайная величина:

X	-3	0	2	5
P	$0,1$	$0,3$	$0,5$	$0,1$

Найти функцию распределения и построить ее график.

Решение. Если $x \le -3,$ то $F(x) = P(X < x) = 0;$

если $-3 < x \le 0,$ то $F(x) = 0,1;$

если $0 < x \le 2,$ то $F(x) = 0,1 + 0,3 = 0,4;$

если $2 < x \le 5,$ то $F(x) = 0,1 + 0,3 + 0,5 = 0,9;$

если $x > 5,$ то $F(x) = 0,1 + 0,3 + 0,5 + 0,1 = 1.$

Итак, функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0; & \text{если } x \le -3, \\ 0,1; & \text{если } -3 < x \le 0, \\ 0,4; & \text{если } 0 < x \le 2, \\ 0,9; & \text{если } 2 < x \le 5, \\ 1; & \text{если } x > 5. \end{cases}$$

График функции распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид и изображен на рис. 6.

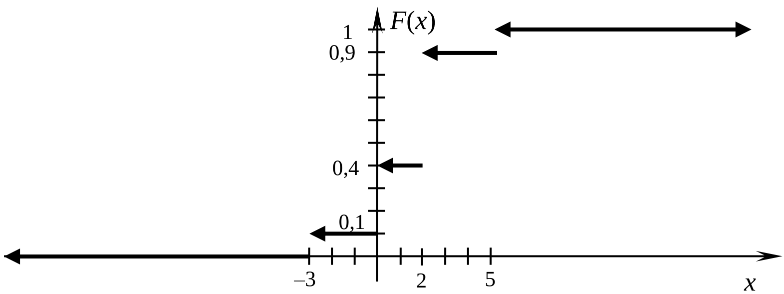


Рис. 6

1.17. Функция плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Непрерывную случайную величину можно задать только аналитическим способом. Функция распределения $F(x)$ этой случайной величины является непрерывной и кусочно-дифференцируемой функцией. Кроме интегральной функции распределения $F(x)$ непрерывную случайную величину можно задать также дифференциальной функцией распределения $f(x)$.

Функцией плотности распределения вероятностей $f(x)$ непрерывной случайной величины называется производная функции распределения: $f(x) = F'(x)$. Из определения следует, что функция распределения $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ и $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$

Свойства плотности вероятностей $f(x)$:

1. Плотность вероятностей $f(x)$ является неотрицательной функцией: $f(x) \ge 0$.

2. Вероятность попадания в интервал для непрерывной случайной величины вычисляется по формуле

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

3. Несобственный интеграл от функции плотности равен 1:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Пример. Непрерывная случайная величина задана функцией плотности вероятностей $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0, \\ C(2x+1), & \text{если} \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{3}, \\ 0, & \text{если} \quad x > \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

Требуется:

1) найти значение постоянной C;

2) найти функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

Решение. 1. Плотность вероятностей должна удовлетворять условию: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$

Поскольку вне отрезка $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ плотность нулевая, то получаем:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{3}} C(2x+1)\,dx = 1 \Rightarrow C \cdot \int\limits_0^{\frac{1}{3}} (2x+1)\,dx = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C \cdot \left(x^2 + x\right)\Big|_0^{\frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow \ C \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right) = 1 \Rightarrow C \ \cdot \ \frac{4}{9} = 1 \Rightarrow C = \frac{9}{4}.$$

Таким образом, функция плотности имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0, \\ \frac{9}{4}(2x+1), & \text{если } 0 \le x \le \frac{1}{3}, \\ 0, & \text{если} \quad x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

2. Найдем функцию распределения. При $x < 0$ плотность вероятностей нулевая и также $F(x) = 0.$ При $0 \le x \le \frac{1}{3}$ функция $f(x) = \frac{4}{9}(2x+1),$ поэтому

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_0^x \frac{9}{4}(2t+1)\,dt = \frac{9}{4}\left(t^2 + t\right)\Big|_0^x = \frac{9}{4}\left(x^2 + x\right) .$$

При $x > \frac{1}{3}$ функция $f(x) = 0,$ поэтому $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_0^{\frac{1}{3}} \frac{9}{4}(2t+1)\,dt + \int\limits_{\frac{1}{3}}^{x} 0dt = \frac{9}{4}\left(t^2 + t\right)\Big|_0^{\frac{1}{3}} = \frac{9}{4}\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{4} \cdot \frac{4}{9} = 1.$$

Итак, функция распределения равна

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0,\\ \dfrac{9}{4}\left(x^2+x\right), & \text{если } 0\le x\le \dfrac{1}{3},\\ 1, & \text{если} \quad x>\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

3. Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$ (рис. 7).

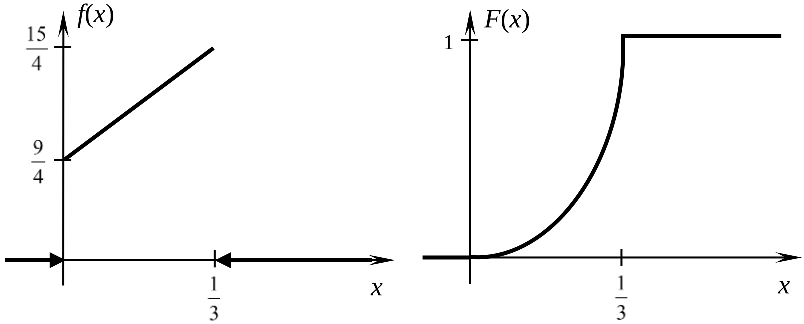


Рис. 7

1.18. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Математическое ожидание непрерывной случайной величины вычисляется по формуле $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$ Если вне отрезка $[a;\, b]$ функция плотности вероятностей нулевая, то $M(X)=\int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$

Дисперсия непрерывной случайной величины вычисляется по формуле: $D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x-M(X)\right)^2 f(x)dx.$ Если вне отрезка $[a;\, b]$ функция плотности вероятностей нулевая, то $D(X)=\int\limits_{a}^{b}\left(x-M(X)\right)^2 f(x)dx.$ Получим рабочую формулу для вычисления дисперсии:

$$D(X)=\int_a^b (x-M(X))^2\; f(x)dx=\int_a^b \left(x^2-2xM(X)+M^2(X)\right)f(x)dx=$$

$$=\int_a^b x^2 f(x)dx-2M(x)\int_a^b xf(x)dx+M^2(x)\int_a^b f(x)dx=\int_a^b x^2 f(x)\,dx-M^2(X)\,.$$

Пример. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<1,\\ \dfrac{1}{3}(x-1), & \text{если} \quad 1\le x\le 4,\\ 1, & \text{если} \quad x>4.\end{cases}$$

Требуется: 1) найти плотность распределения вероятностей $f(x)$; 2) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$; 3) вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины; 4) вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал $(1;2)$.

Решение. 1. Плотность распределения вероятностей

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<1,\\ \left(\dfrac{1}{3}(x-1)\right)', & \text{если } 1\le x\le 4,\\ 0, & \text{если} \quad x>4\end{cases}=\begin{cases}0, \text{ если} & x<1\\ \dfrac{1}{3}, \text{если} & 1\le x\le 4,\\ 0, \text{ если} & x>4.\end{cases}$$

2. Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$ (рис. 8).

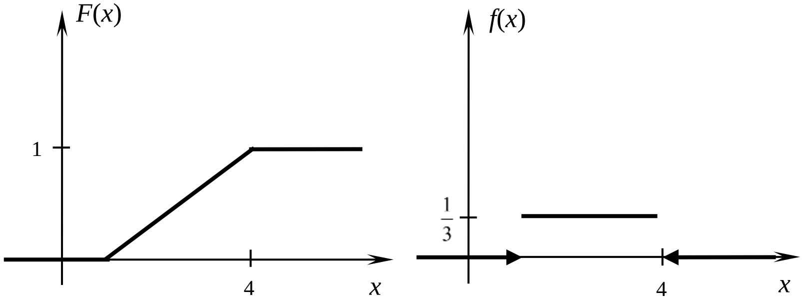


Рис. 8

3. Вычислим числовые характеристики случайной величины. Математическое ожидание равно

$$M(X)=\int_1^4 xf(x)dx=\int_1^4 \frac{1}{3}xdx=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^4=\frac{16}{6}-\frac{1}{6}=\frac{15}{6}=2,5.$$

Дисперсия равна:

$$D(X)=\int_1^4 x^2 f(x)dx-M^2(x)=\int_1^4 \frac{1}{3}x^2dx-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^4-\frac{25}{4}=$$

$$=\frac{64}{9}-\frac{1}{9}-\frac{25}{4}=\frac{3}{4}=0,75.$$

Среднее квадратическое отклонение равно

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0,75}\approx 0,87.$$

4. Вероятность попадания в заданный интервал вычислим по формуле $P(x_1<X<x_2)=F(x_2)-F(x_1)$.

Получим $P(1<X<2)=F(2)-F(1)=\frac{1}{3}\cdot(2-1)-\frac{1}{3}\cdot(1-1)=\frac{1}{3}.$

1.19. Нормальный закон распределения

Непрерывная случайная величина распределена по *нормальному закону*, если ее плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \text{ при } x\in(-\infty,+\infty).$$

Нормальный закон имеет два параметра $a,\sigma.$ Получим вероятностный смысл этих параметров, для этого найдем математическое ожидание и дисперсию нормальной случайной величины:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Введем новую переменную $t=\frac{x-a}{\sigma}\Rightarrow x=\sigma t+a, dx=\sigma dt.$ Получим:

$$M(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t+a)e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}}dt+a\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Первый интеграл равен нулю, как интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку относительно нуля. Второй интеграл есть интеграл Пуассона: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 1.$ Поэтому $M(X) = a.$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Введем новую переменную $t = \frac{x-a}{\sigma} \Rightarrow x = \sigma t + a,\ dx = \sigma dt.$

Получим: $D(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$

Интегрируя по частям при $u = t, du = dt, dv = te^{-\frac{t^2}{2}}dt, v = -e^{-\frac{t^2}{2}}$, получим:

$$D(X) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma^2\, te^{-\frac{t^2}{2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 0 + \sigma^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sigma^2.$$

Итак, параметры нормального закона случайной величины равны ее числовым характеристикам: $a = M(X)$, $\sigma^2 = D(X)$.

График функции плотности вероятностей $f(x)$ называется *нормальной кривой*, или *кривой Гаусса.* Для ее построения запишем основные свойства функции $f(x)$:

1. Функция $f(x) > 0$ для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

2. Прямая $x = a$ является осью симметрии графика.

3. Точка $x = a$ является точкой максимума и $f_{\max}(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$. При $x \in (-\infty, a)$ нормальная кривая возрастает, а при $x \in (a, +\infty)$ убывает.

4. Точки $x = a - \sigma$ и $x = a + \sigma$ являются точками перегиба графика, значение функции в этих точках равно $\frac{1}{\sqrt{2\pi e}\sigma}$.

5. Ось Ox является горизонтальной асимптотой графика $f(x)$. Нормальная кривая изображена на рис. 9.

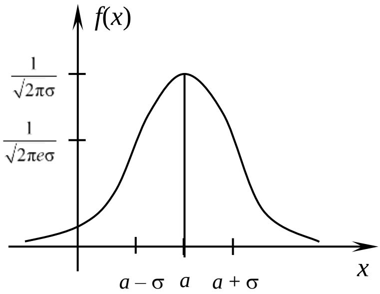


Рис. 9

Отметим влияние параметров a, σ на нормальную кривую. Параметр a не влияет на форму нормальной кривой, его изменения приводят только к сдвигу кривой вдоль оси Ox. Параметр σ влияет на форму нормальной кривой, с увеличением σ максимальная ордината графика уменьшается и кривая становится более пологой, с уменьшением σ максимальная ордината графика увеличивается и кривая вытягивается вдоль оси Oy.

Найдем вероятность попадания нормальной случайной величины в заданный интервал:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Введем новую переменную $t = \dfrac{x-a}{\sigma} \Rightarrow x = \sigma t + a, dx = \sigma dt,$ с новыми пределами интегрирования от $\dfrac{\alpha - a}{\sigma}$ до $\dfrac{\beta - a}{\sigma}$.

Получим:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-\alpha}{\sigma}}^{\frac{\beta-\alpha}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{\beta-\alpha}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{\alpha-\alpha}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Пользуясь функцией Лапласа $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$ получим

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - \alpha}{\sigma}\right).$$

Вероятность заданного отклонения δ нормальной случайной величины от ее математического ожидания a вычисляется по формуле

$$P\left(\left|X-a\right|<\delta\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

При отклонении $\delta=3\sigma$ получим

$$P\left(\left|X-a\right|<3\sigma\right)=2\Phi\left(3\right)=2\cdot 0,49865=0,9973=99,73\ \%.$$

Значит, вероятность отклонения значений нормальной случайной величины от ее математического ожидания более чем на 3σ равна 100 – 99,73 = 0,27 %. По принципу невозможности маловероятных событий это невозможное событие. Таким образом, практически все значения нормальной случайной величины отклоняются от ее математического ожидания не более чем на 3σ, т. е. попадают в интервал $\left(a-3\sigma, a+3\sigma\right)$. В этом заключается правило трех «σ».

Пример 1. Станок изготавливает детали, размер которых распределен нормально. Математическое ожидание размера детали равно 240 мм, среднее квадратическое отклонение 0,8 мм. Годными считаются детали размером от 238,5 до 242 мм. Вычислить: 1) процент изготовления годных деталей; 2) процент бракованных деталей, если точность станка снизится и будет характеризоваться средним квадратическим отклонением 1 мм.

Решение. Запишем кратко условие задачи: $a=240$; $\sigma_1=0,8$; $\sigma_2=1$; $\alpha=238,5$; $\beta=242$.

1. Вычислим вероятность попадания в заданный интервал $\left(238,5;\ 242\right)$ по формуле $P\left(\alpha<X<\beta\right)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$.

$$P\left(238,5<X<242\right)=\Phi\left(\frac{242-240}{0,8}\right)-\Phi\left(\frac{238,5-240}{0,8}\right)=$$

$$=\Phi\left(2,5\right)+\Phi\left(1,88\right)=0,4938+0,4699=0,9637=96,37\ \%.$$

Итак, процент годных деталей при $\sigma_1=0,8$ составляет 96,37 %.

2. Вычислим вероятность попадания в тот же интервал при $\sigma_2=1$:

$$P\left(238,5<X<242\right)=\Phi\left(\frac{242-240}{1}\right)-\Phi\left(\frac{238,5-240}{1}\right)=$$

$$=\Phi\left(2\right)-\Phi\left(1,5\right)=0,4772+0,4332=0,9104=91,04\ \%.$$

Таким образом, при снижении точности станка или при увеличении σ процент годных деталей уменьшится. Процент брака при этом составит: $100-91{,}04=8{,}96$ %. Ответ: 96,37 %; 8,96 %.

Пример 2. Расход семян на 1 га является случайной величиной, распределенной нормально. Норма высева на 1 га составляет 150 кг, а среднее квадратическое отклонение расхода семян равно 10 кг. Определить: 1) вероятность того, что расход семян на 100 га не превысит 15,1 т; 2) количество семян, обеспечивающих посев 100 га с вероятностью 0,99.

Решение. Вычислим параметры нормальной случайной величины – расхода семян на 100 га, которая равна сумме 100 независимых случайных величин X_i – расхода семян на 1 га с параметрами $a_i=150$ кг и $\sigma_i=10$ кг, $i=\overline{1,100}$. Используем свойства математического ожидания и дисперсии:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{100}M(X_i)=150\cdot 100=15000 \text{ кг} = 15 \text{ т},$$

$$\sigma^2=\sum_{i=1}^{100}\sigma_i^2=100\cdot 100=10000\Rightarrow\sigma=100 \text{ кг} = 0{,}1 \text{ т}.$$

1. Запишем кратко условие задачи: a = 15 т; σ = 0,1 т; $\alpha=0$ т; $\beta=15{,}1$ т.

Вычислим вероятность попадания в заданный интервал по формуле

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

$$P(0<X<15{,}1)=\Phi\left(\frac{15{,}1-15}{0{,}1}\right)-\Phi\left(\frac{0-15}{0{,}1}\right)=$$

$$=\Phi(1)+\Phi(150)=0{,}3413+0{,}5=0{,}8413.$$

Итак, вероятность того, что расход семян на 100 га не превысит 15,1 т, равна 84,13 %.

2. Запишем кратко условие задачи: a = 15 т; σ = 0,1 т; $P(0 < X < \beta)$ = = 0,99.

Решение. Запишем вероятность попадания в заданный интервал

$$P(0<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-15}{0{,}1}\right)-\Phi\left(\frac{0-15}{0{,}1}\right)=\Phi\left(\frac{\beta-15}{0{,}1}\right)+\Phi(150)=$$

$$= \Phi\left(\frac{\beta - 15}{0{,}1}\right) + 0{,}5.\ \text{Из равенства}\ \Phi\left(\frac{\beta - 15}{0{,}1}\right) + 0{,}5 = 0{,}99 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{\beta - 15}{0{,}1}\right) = 0{,}99 - 0{,}5 = 0{,}49 \Rightarrow \frac{\beta - 15}{0{,}1} = 2{,}32 \Rightarrow \beta = 15{,}23\ \text{т.}$$

Итак, количество семян, обеспечивающих посев 100 га в 99 % случаях не превысит 15,23 т. Ответ: 84,13 %; 15,23 т.

2. ЗАДАНИЯ, РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ И ДОМАШНИХ ЗАНЯТИЙ

2.1. Комбинаторика

2.1.1. Сколькими способами студент может выбрать в библиотеке 3 книги из 5 ему предложенных?

2.1.2. В студенческой группе 23 человека. Сколькими способами можно выбрать старосту и заместителя?

2.1.3. В хоровом кружке занимаются 10 человек. Необходимо выбрать 3 солиста. Сколькими способами можно это сделать?

2.1.4. Сколько существует способов рассаживания вокруг стола 6 гостей?

2.1.5. Сколько слов можно составить из букв слова «фрагмент», если слова должны состоять из 4 букв?

2.1.6. При встрече каждый из друзей пожал другому руку. Сколько всего было рукопожатий, если встретились 6 друзей?

2.1.7. Рассыльному поручено разнести 4 телеграммы по 4 различным адресам. Сколько различных маршрутов он может составить?

2.1.8. Сколько различных пятизначных чисел можно написать при помощи цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

2.1.9. Имеется 6 видов овощей. Решено готовить салаты из 3 видов овощей. Сколько различных вариантов салатов можно приготовить?

2.1.10. Сколько различных двузначных чисел можно составить при помощи цифр 3, 5, 7, 9, если цифры в записи не повторяются?

2.1.11. Правление банка выбирает из 8 кандидатов 3 человек на различные должности. Сколькими способами это можно сделать?

2.1.12. На 5 сотрудников предприятия выделены 3 путевки в различные санатории. Сколькими способами их можно распределить?

2.1.13. Дачник выделил на своем участке 7 грядок для выращивания различных овощей. Каждый вид овощей должен иметь отдельную грядку. Сколькими способами может высадить дачник овощи на грядки?

2.1.14. Сколькими способами можно расположить на книжной полке 8 различных книг?

2.1.15. Директор фирмы рассматривает заявления о приеме на работу 10 человек. В фирме имеется 4 различные вакансии. Сколькими способами директор может заполнить эти вакансии?

2.1.16. Сколькими способами можно распределить 5 пригласительных билетов на концерт среди 25 студентов?

2.1.17. В профком избрано 8 человек. Из них нужно выбрать председателя, заместителя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

2.1.18. Сколько различных делегаций по 4 человека можно составить из группы в 15 человек?

2.1.19. Студенты данного курса изучают 9 дисциплин. В расписание занятий можно поставить 3 различные дисциплины в день. Сколько существует способов составления расписания на этот день?

2.1.20. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал 10 различных цветов?

2.1.21. Для доступа в компьютерную сеть оператору необходимо набрать пароль из 5 цифр. Оператор забыл необходимый код. Сколько всевозможных комбинаций он может составить для набора пароля, если цифры в нем не повторяются?

2.1.22. Сколько различных экзаменационных комиссий, состоящих из 5 человек, можно составить из 11 преподавателей?

2.1.23. Сколькими способами могут 6 человек стать в очередь к билетной кассе?

2.1.24. В студенческой группе 28 человек. Сколькими способами можно в этой группе назначить 2 человека для дежурства?

2.1.25. В магазине продаются блокноты 7 разных видов и ручки 4 разных видов. Сколькими способами можно выбрать покупку из 2 разных блокнотов и 1 ручки?

2.1.26. Студенческая группа состоит из 15 девушек и 14 юношей. Сколькими способами можно выбрать 2 юношей и 3 девушек для участия в сценке КВН?

2.1.27. В спортклубе 10 лыжников и 7 лыжниц. Сколькими способами можно сформировать команду из 4 лыжников и 3 лыжниц?

2.1.28. В корзине лежат 12 яблок и 10 груш. Сколькими способами можно взять из корзины 2 фрукта одного вида?

2.1.29. В партии имеется 7 изделий первого сорта и 4 изделия высшего сорта. Сколькими способами из партии можно выбрать 3 изделия одного сорта?

2.1.30. В продаже имеется 15 красных тюльпанов, 12 желтых и 16 белых. Сколькими способами можно составить букет из 7 тюльпанов одного цвета?

2.2. Классическое определение вероятности

2.2.1. В урне находится 15 белых и 5 красных шаров. Наугад извлекается 1 шар. Найти вероятность того, что он будет: 1) красным; 2) белым.

2.2.2. Цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 записаны на отдельных карточках. Карточки перемешивают и наугад вынимают 1 карточку. Найти вероятность того, что на этой карточке написано: 1) четное число; 2) двузначное число.

2.2.3. Из колоды в 36 карт вынимается 1 карта. Какова вероятность того, что эта карта окажется тузом?

2.2.4. Из слова ФАКТОРИАЛ случайным образом выбирается одна буква. Какова вероятность того, что выбрана буква А?

2.2.5. Все натуральные числа от 1 до 30 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После перемешивания карточек из урны извлекают 1 карточку. Какова вероятность того, что число на взятой карточке окажется кратным 5?

2.2.6. Подбрасывается 2 игральных кубика. Найти вероятность того, что на верхних гранях кубиков выпало одинаковое количество очков.

2.2.7. Наугад выбрано натуральное число, не превосходящее 10. Какова вероятность того, что это число является простым?

2.2.8. Из букв слова ДИФФЕРЕНЦИАЛ наугад выбирается 1 буква. Какова вероятность того, что эта буква будет: 1) гласной; 2) согласной.

2.2.9. Какова вероятность того, что в наудачу выбранном двузначном числе цифры окажутся одинаковыми?

2.2.10. Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей в сумме на верхних гранях выпадет: 1) 5 очков; 2) не более 4 очков.

2.2.11. Из 28 косточек домино наудачу берется одна. Какова вероятность того, что сумма очков на ней будет: 1) равна 6; 2) не менее 9.

2.2.12. В магазин поступило 30 холодильников, 5 из которых имеют заводской дефект. Случайным образом выбирают 2 холодильника. Какова вероятность того, что оба они будут без дефекта?

2.2.13. В ящике находится 18 яблок, из них 4 красных, остальные зеленые. Наугад берут 5 яблок. Какова вероятность того, что все они окажутся зелеными?

2.2.14. На 9 карточках напечатаны цифры от 1 до 9. Найти вероятность того, что 3 наудачу взятые и поставленные в ряд карточки составят число 541.

2.2.15. Карточки с буквами А, Д, И, В, Н, О сложены в коробку. Какова вероятность того, что, вынимая последовательно одну за другой 4 карточки, получим слово «диво»?

2.2.16. В ящике находится 10 качественных и 2 бракованные детали. Наудачу извлекаются 2 детали. Найти вероятность того, что: 1) обе детали качественные; 2) обе детали бракованные.

2.2.17. В мешочке 5 одинаковых кубиков, на гранях каждого из которых одна из букв: е, я, с, п, н. Найти вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных в одну линию кубиках можно будет прочесть слово «песня».

2.2.18. На экзамене студенту предлагается билет, состоящий из 3 вопросов. Из 50 вопросов программы студент знает 42 вопроса. Какова вероятность того, что взятый студентом билет будет состоять из известных ему вопросов?

2.2.19. В пруду находится 12 лещей и 14 карпов. Какова вероятность того, что 3 выловленные наудачу рыбы окажутся карпами.

2.2.20. Из 10 теннисных мячей, среди которых 4 мяча новые, для очередной игры случайным образом берут три. Какова вероятность того, что среди взятых мячей 2 мяча будут новыми?

2.2.21. Из колоды в 36 карт берутся наудачу 5 карт. Вычислить вероятность того, что среди вынутых карт будут 2 туза.

2.2.22. У продавца на рынке 40 арбузов, из которых 34 спелых. Покупатель выбирает 2 арбуза. Какова вероятность того, что оба выбранных арбуза окажутся спелыми?

2.2.23. Из 15 билетов выигрышными являются 4. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу 6 билетов будет 2 выигрышных?

2.2.24. Группа туристов из 12 юношей и 8 девушек выбирает по жребию хозяйственную команду в составе 4 человек. Какова вероятность того, что в числе избранных окажутся 2 юношей и 2 девушки?

2.2.25. Среди 25 студентов группы, в которой 10 девушек, разыгрывается 5 билетов на концерт. Определить вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 2 девушки.

2.2.26. На полке стоит 15 книг, из них 6 в переплете. Наудачу берут 4 книги. Какова вероятность того, что одна из них в переплете?

2.2.27. В ящике 6 белых, 7 красных и 3 черных шара. Какова вероятность того, что 2 вынутых шара окажутся одного цвета?

2.2.28. В группе из 11 спортсменов 7 мастеров спорта. Найти вероятность того, что из 2 случайным образом отобранных спортсменов хотя бы один мастер спорта.

2.2.29. Из колоды в 36 карт берутся наудачу 4 карты. Найти вероятность того, что хотя бы три из них будут бубновой масти.

2.2.30. Из 9 книг, стоящих на полке, 5 художественных. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых 3 книг художественных менее двух.

2.3. Теоремы сложения и умножения вероятностей

2.3.1. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9; вторым – 0,7. Оба стрелка сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что цель поражена: 1) 2 раза; 2) 1 раз?

2.3.2. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Появление бракованной детали для станка № 1 составляет 3 %, для станка № 2 – 4 %. С каждого станка взяли по одной детали. Найти вероятность того, что: 1) обе детали стандартные; 2) 1 деталь стандартная.

2.3.3. Студент пришел на экзамен, зная только 25 вопросов из 30. Экзаменатор задал студенту 3 вопроса. Вычислить вероятность того, что студент ответит на все 3 вопроса.

2.3.4. Вероятности того, что каждый из трех друзей придет в условное место, соответственно равны 0,8; 0,4 и 0,7. Определить вероятность того, что встреча состоится, если для этого достаточно явиться хотя бы двум друзьям.

2.3.5. Повар приготовил 15 омлетов, причем 4 пересолил. Какова вероятность, что из 3 случайно выбранных омлетов все окажутся пересоленными?

2.3.6. Из группы студентов, в которой 16 юношей и 12 девушек, в совет факультета избираются 2 человека. Какова вероятность того, что среди избранных окажется хотя бы 1 юноша?

2.3.7. В автопробеге участвуют 3 автомобиля. Первый может сойти с маршрута с вероятностью 0,15; второй – с вероятностью 0,05; а третий – с вероятностью 0,1. Определить вероятность того, что к финишу придет: 1) только 1 автомобиль; 2) хотя бы 2 автомобиля.

2.3.8. В урне 10 зеленых, 8 синих и 12 желтых шаров. Найти вероятность того, что 2 наугад извлеченных шара одного цвета.

2.3.9. Рабочий обслуживает 3 станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа не потребует внимания рабочего первый станок, равна 0,9; второй – 0,8; третий – 0,65. Найти вероятность того, что в течение часа не потребует внимания рабочего: 1) 2 станка; 2) хотя бы 1 станок.

2.3.10. В поле работают 2 комбайна. Вероятность поломки в течение дня для первого комбайна равна 0,2; а для второго – 0,1. Найти вероятность следующих событий: 1) сломается в течение дня только один комбайн; 2) ни один комбайн не сломается.

2.3.11. Для сигнализации об аварии установлены 2 независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор, равна 0,95; а второй – 0,97. Найти вероятность того, что при аварии сработает: 1) только 1 сигнализатор; 2) хотя бы 1 сигнализатор.

2.3.12. Три орудия ведут огонь по цели, вероятность попадания в которую при одном выстреле из первого орудия равна 0,5; из второго – 0,4 и из третьего – 0,6. Зная, что каждое орудие стреляет один раз, найти вероятность того, что цель будет поражена: 1) 3 орудиями; 2) хотя бы 2 орудиями.

2.3.13. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором, третьем справочнике, соответственно равны 0,6; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что нужная формула содержится: 1) только в одном справочнике; 2) хотя бы в одном справочнике.

2.3.14. В корзине находится 11 груш и 15 яблок. Наудачу выбирают 2 фрукта. Какова вероятность того, что выбранные фрукты – груши?

2.3.15. В телестудии три телевизионные камеры. Вероятности того, что в данный момент камера включена, соответственно равны 0,95; 0,9; 0,7. Найти вероятность того, что в данный момент включены: 1) три камеры; 2) хотя бы одна камера.

2.3.16. В первом ящике 20 деталей, 15 из них – стандартные. Из каждого ящика наугад берут по одной детали. Какова вероятность того, что: 1) обе детали будут стандартными; 2) только 1 деталь стандартная.

2.3.17. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,7; третий – 0,6. Вычислить вероятность того, что студент сдаст: 1) 2 экзамена; 2) не менее 2 экзаменов.

2.3.18. Заводом послана автомашина за различными материалами на три базы. Вероятность наличия нужного материала на первой базе равна 0,9; на второй – 0,95; на третьей – 0,7. Найти вероятность того, что нужный материал окажется: 1) на одной базе; 2) хотя бы на двух базах.

2.3.19. В двух отсеках зернохранилища находится посевной материал пшеницы. Семена первого отсека имеют всхожесть 80 %, второго – 95 %. Отбирается по одному зерну из каждого отсека. Найти вероятность того, что: 1) оба зерна дадут всходы; 2) только одно зерно взойдет.

2.3.20. Три спортсмена должны выполнить норму мастера спорта. Вероятность того, что первый спортсмен выполнит норму, равна 0,8; второй – 0,85; третий – 0,7. Найти вероятность того, что норма мастера спорта будет выполнена: 1) только одним спортсменом; 2) хотя бы двумя спортсменами.

2.3.21. В урне 10 красных, 4 синих и 6 черных шаров. Найти вероятность того, что 2 наугад извлеченных шара будут одного цвета.

2.3.22. В ящике 20 яблок. Из них 3 яблока поражены болезнью в скрытой форме. Из ящика извлекают 2 плода. Вычислить вероятность того, что поражены болезнью: 1) 2 плода; 2) хотя бы 1 плод.

2.3.23. Деталь проходит три операции обработки. Вероятность того, что она окажется бракованной после первой операции, равна 0,02; после второй – 0,03; после третьей – 0,01. Найти вероятность того, что деталь будет: 1) небракованной после трех операций; 2) бракованной после трех операций, предполагая, что появление брака на отдельных операциях – независимые события.

2.3.24. Один стрелок дает 80 % попаданий в цель, а другой – 60 %. Найти вероятность поражения цели, если оба стрелка делают по одному выстрелу. Цель считается пораженной при попадании в нее хотя бы одной из пуль.

2.3.25. При одном цикле обзора трех радиолокационных станций, следящих за космическим кораблем, вероятности его обнаружения соответственно равны 0,7; 0,85; 0,9. Найти вероятность обнаружения корабля при одном цикле: 1) 3 станциями; 2) не более чем 1 станцией.

2.3.26. На участке кросса для мотоциклиста-гонщика имеется три препятствия. Вероятность успешного прохождения первого препятствия равна 0,4; второго – 0,5; третьего – 0,6. Найти вероятность успешного преодоления: 1) двух препятствий; 2) хотя бы одного препятствия.

2.3.27. В партии из 9 деталей 7 стандартных. Какова вероятность того, что среди наугад извлеченных двух деталей есть хотя бы одна стандартная?

2.3.28. Эффективность некоторой вакцины в формировании иммунитета составляет 80 %. Вакцинировалось два животных. Найти вероятность того, что иммунитет приобретен: 1) двумя животными; 2) только одним животным.

2.3.29. Достаточным условием сдачи студентом коллоквиума является ответ на один из двух вопросов, предлагаемых преподавателем. Студент знает 35 вопросов из 42. Какова вероятность сдачи коллоквиума?

2.3.30. На обувной фабрике в отдельных цехах производятся подметки, каблуки и верхи ботинок. Дефектными оказываются 0,5% каблуков, 2 % подметок и 4 % верхов. Произведенные каблуки, подметки и верхи случайно комбинируются в цехе, где шьются ботинки. Найти вероятность того, что изготовленная пара ботинок будет содержать дефекты.

2.4. Формула полной вероятности. Формулы Байесса

2.4.1. В двух корзинах находится картофель. В первой – 8 % поврежденных клубней, во второй – 10 %. Из наудачу выбранной корзины берут один клубень. Какова вероятность того, что клубень не поврежден?

2.4.2. На наблюдаемой станции установлены три радиолокатора. Вероятность обнаружения цели первым локатором равна 0,79; вторым – 0,88; третьим – 0,9. Найти вероятность обнаружения цели наугад включенным радиолокатором.

2.4.3. Изделие проверяется на стандартность одним из двух товароведов. Первый товаровед проверяет $55\,\%$ изделий, второй – $45\,\%$. Вероятности того, что изделие будет признано стандартным, равны соответственно 0,90 и 0,98. При проверке изделие было признано стандартным. Найти вероятность того, что это изделие проверил второй товаровед.

2.4.4. На сборку телевизоров поступают микросхемы от двух поставщиков, причем $70\,\%$ микросхем поступает от первого поставщика, и 30 % – от второго. Брак среди микросхем первого поставщика составляет $2\,\%$, второго – $3\,\%$. Какова вероятность того, что взятая наудачу микросхема окажется без брака?

2.4.5. В магазин на продажу поступили электролампочки с трех заводов. Известно, что среди лампочек первого завода $0,3\,\%$ брака, второго – $0,2\,\%$, третьего – $0,4\,\%$. Найти вероятность покупки годной электролампочки, если с первого завода поступило 1000 лампочек, со второго – 1800 и с третьего – 2200.

2.4.6. На склад поступает продукция двух фабрик, причем доля продукции первой фабрики составляет $60\,\%$, второй – $40\,\%$. Средний процент нестандартных изделий в продукции первой фабрики равен $2{,}5\,\%$, второй – $3\,\%$. Найти вероятность того, что наудачу взятое изделие произведено на первой фабрике, если оно оказалось стандартным.

2.4.7. На трех автоматических станках изготавливаются одинаковые детали. Известно, что $30\,\%$ продукции производится на первом станке, $25\,\%$ – на втором и $45\,\%$ – на третьем. Вероятность изготовления детали, отвечающей стандарту, на первом станке равна 0,99; на втором – 0,97; на третьем – 0,98. Определить вероятность того, что взятая наугад деталь из нерассортированной продукции не соответствует стандарту.

2.4.8. В группе из 20 стрелков имеются 4 отличных, 10 хороших и 6 посредственных стрелков. На линию огня наугад вызывается стрелок и производит один выстрел. Найти вероятность поражения цели, если известно, что вероятности поражения цели для отличного, хорошего и посредственного стрелков равны соответственно $0{,}91$; $0{,}84$ и $0{,}75$.

2.4.9. В канцелярии работают 3 секретаря, которые отправляют соответственно 40, 35 и 25 % бумаг. Первый секретарь правильно адресует бумаги с вероятностью 0,94; второй – 0,98; третий – 0,92. Найти вероятность того, что адресованный без ошибок документ отправлен вторым секретарем.

2.4.10. В трех одинаковых урнах содержится по 10 шаров. В первой урне находится 6 белых и 4 черных шара, во второй – 3 красных и 7 черных шаров, а в третьей – 2 белых и 8 черных шаров. Какова вероятность извлечения черного шара из наугад выбранной урны?

2.4.11. В телевизионном ателье имеется 10 кинескопов первого типа и 15 кинескопов второго. Вероятности того, что кинескопы выдержат гарантийный срок службы, равны соответственно 0,88 и 0,79. Взятый наудачу кинескоп выдержал гарантийный срок. Какова вероятность того, что он принадлежит партии кинескопов первого типа?

2.4.12. В четырех корзинах находится картофель. В первой корзине имеется 4 % поврежденных клубней, во второй – 9 %, в третьей – 7 %, а в четвертой – 5 %. Какова вероятность извлечения неповрежденного клубня из наугад выбранной корзины?

2.4.13. На наблюдательной станции установлены 3 радиолокатора. Первый локатор не обнаруживает 10 % объектов, второй – 12 %, третий – 8 %. Цель обнаружена наугад включенным радиолокатором. Какова вероятность того, что с этой задачей справился второй радиолокатор?

2.4.14. В учебной лаборатории имеется 14 измерительных приборов первого типа и 6 второго. Вероятность безотказной работы во время опыта первого прибора равна 0,82; а второго – 0,94. При проведении опыта наудачу выбранный прибор работал безотказно. Какова вероятность того, что он является прибором первого типа?

2.4.15. По линии связи передается 80 % сигналов типа А и 20 % – типа В. В среднем принимается 55 % сигналов типа А и 69 % – типа В. Посланный сигнал был принят. Найти вероятность того, что этот сигнал типа А.

2.4.16. Для участия в студенческих соревнованиях выделено 10 человек из первой группы, 8 из второй, 7 из третьей. Вероятности попадания в сборную команду академии равны 0,8; 0,7 и 0,65 для студентов первой, второй и третьей группы соответственно. Какова вероятность того, что случайно выбранный студент попадет в сборную команду?

2.4.17. На участке, изготовляющем болты, на первом станке производится 25 %, на втором – 32 %, на третьем – 43 % всех изделий. В продукции каждого станка брак составляет 5 %, 4,5 %, 2,6 % изделий соответственно. Найти вероятность того, что случайно взятый дефектный болт изготовлен на первом станке.

2.4.18. В двух ящиках с 30 шарами в каждом содержится по 6 красных шаров, а в четырех других с 15 шарами в каждом – по 3 красных шара. Найти вероятность того, что из наугад взятого ящика вынули красный шар.

2.4.19. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из 3 касс первого зала или в одну из 5 касс второго зала. Вероятность наличия билета к моменту прихода пассажира в кассах первого зала равна 0,72; а в кассах второго – 0,67. Найти вероятность покупки билета пассажиром в наугад выбранной кассе.

2.4.20. На трех станках обрабатываются однотипные детали. Вероятности брака для первого, второго и третьего станков равны соответственно 0,015; 0,021 и 0,018. Обработанные детали складываются в один ящик. Производительности станков относятся как 3:2:5. Определить вероятность того, что взятая наудачу деталь из ящика будет бракованной.

2.4.21. Автомашина используется для перевозки товара в три магазина. В первом магазине разгрузка в течение 30 минут выполняется с вероятностью 0,76; во втором – 0,84; а в третьем – 0,63. На базу сообщили, что машина разгружена за 30 минут. Какова вероятность того, что это произошло в первом магазине?

2.4.22. Литье в болванках поступает из трех заготовительных цехов: 30 % из первого цеха, 42 % из второго и 28 % из третьего цеха. При этом в продукции первого цеха имеется 5 % брака, второго – 8,5 % брака, а третьего – 4 % брака. Найти вероятность того, что взятая наугад болванка окажется без дефектов.

2.4.23. При сборке изделия на конвейере используются детали, изготавливаемые 3 поставщиками. Вероятность появления бракованной детали в партии, поступающей от первого поставщика, составляет 0,005; от второго поставщика – 0,008; от третьего – 0,003. От первого поставщика поступила партия в 5 000 деталей, от второго – 4 000, от третьего – 1 000 деталей. Найти вероятность того, что наугад взятая с конвейера деталь окажется бракованной.

2.4.24. В торговую сеть поставляются телевизоры тремя фирмами в соотношении 5:2:3. Телевизоры, поступающие от этих фирм, не требуют ремонта в течение гарантийного срока соответственно в 96 %, 92 % и 94 % случаев. Купленный наудачу телевизор не потребовал ремонта в течение гарантийного срока. Найти вероятность того, что поставку этого телевизора осуществила третья фирма.

2.4.25. Число грузовых машин, проезжающих мимо бензоколонки, относится к числу легковых машин как 3:4. Вероятность того, что грузовая машина будет заправляться, равна 0,1; а легковая – 0,2. У бензоколонки заправляется машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

2.4.26. Для участия в студенческой олимпиаде отобраны 8 студентов первого курса и 6 студентов второго курса. Вероятность того, что студент первого курса попадет в сборную университета, равна 0,6; а студент второго курса – 0,8. Найти вероятность того, что случайно выбранный студент попал в сборную университета.

2.4.27. В двух корзинах находятся груши. В первой – 25 штук, из них 3 поврежденные; во второй – 30 штук, из них 4 поврежденные. Из наудачу выбранной корзины взята одна груша, которая оказалась неповрежденной. Найти вероятность того, что груша была взята из первой корзины.

2.4.28. Два стрелка независимо один от другого стреляют по одной мишени, делая по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка – 0,8; для второго – 0,6. После стрельбы в мишень обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что эта пробоина принадлежит второму стрелку.

2.4.29. В сборочный цех завода поступают детали с трех автоматов. Первый автомат дает 0,3 % брака, второй – 1 %, третий – 0,2 %.

Определить вероятность попадания на сборку небракованной детали, если с каждого автомата в цех поступило соответственно 500, 200 и 300 деталей.

2.4.30. В первой урне содержится 10 шаров, из них 7 белых, во второй урне – 20 шаров, из них 8 белых. Из каждой урны наудачу извлекают по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

2.5. Формула Бернулли

2.5.1. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле составляет 0,6. По мишени производится 5 независимых выстрелов. Найти вероятность того, что попаданий будет: 1) ровно 4; 2) не более 2.

2.5.2. В мастерской работает 6 моторов. Вероятность того, что мотор работает с полной нагрузкой, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент времени работает с полной нагрузкой: 1) 6 моторов; 2) менее 3.

2.5.3. Вероятность того, что баскетболист забросит мяч в корзину, равна 0,3. Произведено 5 бросков. Найти вероятность того, что будет: 1) 2 попадания; 2) хотя бы 4 попадания.

2.5.4. В результате каждого визита страхового агента договор заключается с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что после 7 визитов будет заключено договоров: 1) ровно 5; 2) не более 2.

2.5.5. Всхожесть семян ржи составляет 90 %. Чему равна вероятность того, что из 6 посеянных семян взойдут: 1) ровно 4; 2) не менее 5.

2.5.6. Вероятность успешной сдачи студентом каждого из пяти экзаменов оценивается в 80 %. Найти вероятность успешной сдачи: 1) ровно 3 экзаменов; 2) не менее 4 экзаменов.

2.5.7. В ящике картофеля 20 % клубней, пораженных болезнью. Какова вероятность того, что среди 4 взятых наугад клубней окажется пораженных: 1) ровно 1; 2) не менее 3.

2.5.8. Применяемый метод лечения приводит к выздоровлению в 90 % случаев. Найти вероятность того, что из пяти больных поправятся: 1) все 5; 2) не менее 3.

2.5.9. Прибор состоит из 4 узлов. Безотказная работа в течение смены каждого из них составляет 80 %. Узлы выходят из строя независимо один от другого. Найти вероятность того, что за смену откажут: 1) 3 узла; 2) не более 2.

2.5.10. Всхожесть семян лимона составляет 90 %. Найти вероятность того, что из 5 посеянных семян взойдут: 1) ровно 3; 2) не менее 3.

2.5.11. Из 5 яиц в среднем получается 4 живых цыпленка. Какова вероятность того, что из 6 яиц получится: 1) 5 живых цыплят; 2) хотя бы 4 живых цыпленка.

2.5.12. Вероятность изготовления детали высшего сорта на данном станке равна 0,6. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых 7 деталей окажется: 1) только 3 детали высшего сорта; 2) хотя бы 6 деталей высшего сорта.

2.5.13. Доля плодов зараженных болезнью в скрытой форме, составляет 10 %. Случайным образом отбирается 6 плодов. Определить вероятность того, что среди отобранных плодов окажется: 1) ровно 3 зараженных; 2) не менее 2 зараженных.

2.5.14. В магазин вошли 7 покупателей. Вероятность совершить покупку для каждого вошедшего равна 0,3. Найти вероятность того, что покупку совершат: 1) ровно 4 человека; 2) не более 2 человек.

2.5.15. Оптовая база обслуживает 6 магазинов. Вероятность получения заявки базой на данный день для каждого магазина равна 0,6. Найти вероятность того, что в этот день будет: 1) 5 заявок; 2) не более 2 заявок.

2.5.16. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0,1. Найти вероятность того, что сообщение из 7 знаков будет содержать: 1) 4 искажения; 2) не более 3 искажений.

2.5.17. Вероятность того, что изделие пройдет контроль, равна 0,8. Найти вероятность того, что из 6 изделий контроль пройдут: 1) 5 изделий; 2) хотя бы 3 изделия.

2.5.18. В хлопке содержится 10 % коротких волокон. Определить вероятность того, что среди отобранных наудачу 6 волокон окажется коротких: 1) ровно 2; 2) не менее 4.

2.5.19. На каждые 10 собранных яблок в среднем приходится 7 стандартных. Наугад взято 5 яблок. Найти вероятность того, что среди них окажется стандартных: 1) ровно 2; 2) не менее 3.

2.5.20. В некотором водоеме карпы составляют 80 %. Найти вероятность того, что из 5 выловленных в этом водоеме рыб окажется: 1) 4 карпа; 2) не более 2 карпов.

2.5.21. Приживаемость саженцев равна 70 %. Найти вероятность того, что из 6 саженцев приживутся: 1) ровно 3; 2) хотя бы 4.

2.5.22. Монету бросают 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет: 1) ровно 4 раза; 2) не менее 2 раз.

2.5.23. Статистика показывает, что 30 % покупателей необходима мужская обувь 42-го размера. Найти вероятность того, что из 5 покупателей обувь 42-го размера необходима: 1) 2 покупателям; 2) не менее чем 4.

2.5.24. По данным ОТК, на каждую сотню металлических брусков, заготовленных для обработки, приходится 30 с зазубринами. Какова вероятность того, что из случайно взятых 7 брусков окажется без дефектов: 1) 5 брусков; 2) хотя бы 5 брусков?

2.5.25. Вероятность попадания в судно одной торпедой равна 0,2. Выпущено 5 торпед. Найти вероятность того, что произошло: 1) 2 попадания в судно; 2) более 3 попаданий.

2.5.26. Рабочий обслуживает 7 однотипных станков. Вероятность того, что станок потребует внимания рабочего в течение часа, равна 0,1. Найти вероятность того, что в течение часа внимания рабочего потребует: 1) ровно 2 станка; 2) не менее 5 станков.

2.5.27. При установившемся технологическом процессе 80 % всей произведенной продукции оказывается продукцией высшего сорта. Найти вероятность того, что среди отобранных 6 изделий окажется: 1) 4 изделия высшего сорта; 2) не более 2 изделий высшего сорта.

2.5.28. В лотерее из каждых 7 билетов один выигрышный. Какова вероятность, имея 6 билетов, выиграть: 1) по одному билету; 2) не менее чем по 4 билетам.

2.5.29. В 75 % расход электроэнергии в течение одних суток не превышает установленной нормы. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии не превысит нормы: 1) в течение 4 суток; 2) в течение не более 2 суток.

2.5.30. Приняв вероятность рождения мальчика и девочки одинаковыми, найти вероятность того, что среди 5 новорожденных будет: 1) 2 девочки; 2) хотя бы 3 девочки.

2.6. Локальная и интегральная формулы Лапласа

2.6.1. Всхожесть семян пшеницы составляет 75 %. Найти вероятность того, что из высаженных 300 зерен пшеницы взойдет от 200 до 230 зерен.

2.6.2. Проводится 50 раз опыт с подбрасыванием монеты. Найти вероятность выпадения герба равно в половине случаев.

2.6.3. Установлено, что приживаемость саженцев яблони составляет 60 %. Найти вероятность того, что из 100 высаженных саженцев приживется 65 яблонь.

2.6.4. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна 0,25. Найти вероятность того, что из 200 случайно отобранных деталей непроверенных окажется от 40 до 50.

2.6.5. В жилом доме имеется 2 000 ламп. Вероятность включения каждой из них в вечернее время равна 0,5. Найти вероятность того, что число одновременно включенных ламп будет между 970 и 1 050.

2.6.6. Вероятность выживания бактерий после радиоактивного облучения равна 0,1. Найти вероятность того, что в колонии из 300 бактерий после облучения останется 40.

2.6.7. Вероятность изготовить деталь отличного качества для мастера определенной квалификации равна 0,75. За смену он изготовил 400 деталей. Найти вероятность того, что среди них 280 деталей отличного качества.

2.6.8. Вероятность покупки при посещении магазина клиентом равна 0,7. Найти вероятность того, что при 120 посещений магазина клиент совершит покупку ровно 80 раз.

2.6.9. Приживаемость деревьев равна 80 %. Найти вероятность того, что среди 300 высаженных деревьев приживется не менее 250 деревьев.

2.6.10. Вероятность поражения мишени стрелком равна 0,65. Найти вероятность того, что при 150 выстрелах мишень будет поражена от 90 до 110 раз.

2.6.11. Вероятность найти белый гриб среди других грибов в данной местности равна 0,25. Какова вероятность того, что среди 300 грибов белых будет 80?

2.6.12. В партии из 768 арбузов каждый арбуз оказывается неспелым с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что количество спелых арбузов в этой партии будет в пределах от 564 до 600.

2.6.13. Всхожесть семян укропа составляет 90 %. Найти вероятность того, что из 1 100 высаженных семян не взойдет не более 90.

2.6.14. Изделия высшего сорта составляют 60 %. Найти вероятность того, что из 1 000 отобранных изделий не менее 580 изделий высшего сорта.

2.6.15. Вероятность рождения мальчика равна 0,52. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется ровно 45 мальчиков.

2.6.16. При производстве запчастей брак составляет в среднем 8 %. Определить вероятность того, что в партии из 150 запчастей годных будет не менее 135.

2.6.17. Игральную кость подбрасывают 250 раз. Какова вероятность того, что четное число очков выпадет от 95 до 130 раз?

2.6.18. Вероятность переключения передачи на каждом километре 300-километровой трассы равна 0,15. Найти вероятность того, что переключение передач наступит 50 раз на этой трассе.

2.6.19. По данным ОТК, 20 % деталей не отвечает стандарту. Найти вероятность того, что в партии из 200 деталей стандартных будет ровно 150.

2.6.20. Установлено, что 80 % передаваемых сигналов принимается. Найти вероятность того, что из 120 передаваемых сигналов останутся непринятыми 20 сигналов.

2.6.21. На экономическом факультете университета девушки составляют 80 %. Найти вероятность того, что из 500 студентов этого факультета юноши составляют не более 110 студентов.

2.6.22. Среди 300 клубней картофеля 60 клубней раннего сорта. Какова вероятность того, что из выбранных 100 клубней окажется не менее 15 клубней раннего сорта?

2.6.23. В магазин поступили костюмы из двух фабрик. Причем продукции первой фабрики в два больше, чем второй. Найти вероятность того, что из купленных 80 костюмов ровно 25 изготовлены на второй фабрике.

2.6.24. Вероятность остановки ткацкого станка в течение смены равна 10 %. В цеху установлено 50 станков. Найти вероятность безостановочной работы в течение смены хотя бы 44 станков.

2.6.25. Посажено 500 семян риса, имеющих всхожесть 80 %. Найти вероятность того, что 85 семян из них не взойдут.

2.6.26. Сколько раз с вероятностью 0,0484 можно ожидать появления события A в 100 независимых испытаниях, если вероятность его появления в отдельном испытании равна 0,5.

2.6.27. Вероятность появления события в одном испытании равна 0,8. Найти вероятность того, что при повторении этого испытания 500 раз частота появления события отклонится от вероятности не более чем на 0,03.

2.6.28. Было посажено 400 деревьев. Найти вероятность того, что число прижившихся деревьев больше 310, если вероятность того, что отдельно взятое дерево не приживется, равна 0,2.

2.6.29. По нормативу на станке допускается выпуск 5 % бракованных деталей. Какую минимальную партию деталей нужно отобрать, чтобы с вероятностью 0,96 отклонение относительной частоты брака от нормативной в этой партии деталей не превысило 0,02?

2.6.30. Фабрика выпускает в среднем 55 % продукции высшего сорта. Планируется выпуск 1000 изделий. В каких пределах будет заключено количество изделий высшего сорта среди них с вероятностью 0,98?

2.7. Формула Пуассона. Простейший поток событий

2.7.1. При изготовлении подшипников нестандартные детали составляют 0,5 %. Найти вероятность того, что в партии из 1 000 деталей нестандартных подшипников окажется не более 2.

2.7.2. Среднее число опечаток на странице рукописи составляет 6 %. Найти вероятность того, что рукопись объемом 100 страниц содержит не более 3 опечаток.

2.7.3. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,002. Найти вероятность того, что при 4 000 выстрелах будет не менее 4 попаданий.

2.7.4. Радиоаппаратура содержит 100 элементов, вероятность отказа каждого из которых равна 0,001. Какова вероятность отказа радиоаппаратуры, если для этого достаточно отказа хотя бы одного элемента.

2.7.5. Завод выпускает в среднем 99,8 % доброкачественных изделий. Какова вероятность того, что среди выбранных наудачу 400 изделий бракованных будет не менее 4?

2.7.6. Вероятность того, что прибор не выдержит испытания, равна 0,0004. Найти вероятность того, что из 10 000 приборов не выдержат испытания от 1 до 5 приборов.

2.7.7. Брак при штамповке деталей составляет в среднем 0,8 %. Найти вероятность того, что из взятых на проверку 500 деталей будет не более 5 бракованных.

2.7.8. Всхожесть семян клевера составляет 96 %. Найти вероятность того, что из 225 высаженных семян не взойдет ровно 9.

2.7.9. Среднее число сорняков среди посевов пшеницы на 1м^2 равно 4. Определить вероятность того, что на выбранном наудачу участке, площадью 2 м^2, число семян сорняков составит не менее 8.

2.7.10. Спутниковая антенна содержит 200 транзисторов. Вероятность выхода из строя каждого из них равна 0,035. Найти вероятность выхода из строя не более 6 транзисторов.

2.7.11. Станок состоит из 1 000 независимо работающих узлов. Вероятность отказа одного узла в течение месяца равна 0,003. Найти вероятность отказа в течение месяца не более 3 узлов.

2.7.12. Вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости равна 0,03. Сверла укладывают в коробки по 100 штук. Какова вероятность того, что в случайно взятой коробке число сверл с указанным дефектом не превысит двух?

2.7.13. Вероятность того, что при перевозке бутылка разобьется, равна 0,004. Какова вероятность того, что после перевозки 1000 бутылок в партии окажется хотя бы 3 битые бутылки?

2.7.14. Вероятность потерять кредитную карту в течение недели для случайно выбранного вкладчика равна 0,002. Банк выдал кредитные карты 2 000 клиентам. Найти вероятность того, что за предстоящую неделю будет утеряно не более 5 кредитных карт.

2.7.15. Устройство состоит из 1 000 независимо работающих элементов. Вероятность отказа любого элемента в течение гарантийного срока равна 0,004. Найти вероятность того, что во время гарантийного срока откажут не менее 5 элементов.

2.7.16. Завод отправил на базу 400 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено не более 2 изделий.

2.7.17. Среди семян ржи 0,04 % сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 5 000 семян обнаружить не более 3 семян сорняков?

2.7.18. Средняя плотность бактерий в 1м^3 воздуха равна 200. На пробу берется 4 дм^3 воздуха. Какова вероятность того, что в нем будет обнаружена хотя бы одна бактерия?

2.7.19. Установлено, что 3 % картофеля сорта «Скарб» поражается фитофторой. Найти вероятность того, что из посаженных 200 кустов картофеля этого сорта будут поражены не более 6 кустов.

2.7.20. На предприятии изготовлено и отправлено заказчику 5 000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что бутылка может оказаться битой, равна 0,0001. Найти вероятность того, что в отправленной партии не будет битых бутылок.

2.7.21. Для продвижения своей продукции на рынке фирма раскладывает рекламные листки по почтовым ящикам. Опыт работы показывает, что примерно в одном случае из 2 000 следует заказ продукции. Найти вероятность того, что при размещении 14 000 рекламных листков поступит не менее 5 заказов.

2.7.22. Страховая компания обслуживает 1 000 клиентов. Вероятность того, что в течение одного дня клиент обратится в компанию, равна 0,003. Какова вероятность того, что в течение двух дней в нее обратятся 6 клиентов?

2.7.23. При работе компьютера в случайные моменты времени возникают сбои. Поток неисправностей можно считать простейшим. Среднее число сбоев за сутки равно 2. Найти вероятность того, что в течение 3 суток произойдет не более 4 сбоев.

2.7.24. На АТС в среднем в течение часа поступает 12 вызовов. Поток телефонных звонков можно считать простейшим. Найти вероятность того, что за полчаса на станцию поступит не менее 4 вызовов.

2.7.25. Среднее число заказов такси, поступающих диспетчеру в одну минуту, равно 4. Поток заказов можно считать простейшим. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит не менее 6 вызовов такси.

2.7.26. Среднее число машин, прибывающих в автопарк за 1 час, равно 3. Поток прибывших машин считается простейшим. Найти вероятность того, что за 3 часа в автопарк прибудет от 4 до 9 машин.

2.7.27. Среднее число самолетов, прибывающих в аэропорт за 1 час, равно 30. Поток прилетающих самолетов считается простейшим. Какова вероятность того, что за 10 минут в аэропорт прибудет ровно 5 самолетов?

2.7.28. Поток посетителей магазина считается простейшим. В среднем за 1 час в магазине бывает 14 человек. Какова вероятность того, что в случайно выбранные 30 минут в магазине будет находиться не менее 6 человек?

2.7.29. К причалу за сутки подходят 30 прогулочных яхт. Поток прибывающих яхт можно считать простейшим. Найти вероятность того, что в течение 4 часов к причалу подойдет не более 5 яхт.

2.7.30. Мастерская по ремонту часов работает с 9 часов утра до 5 часов вечера. В течение дня в мастерскую в среднем обращаются 20 клиентов. Поток посетителей можно считать простейшим. Найти вероятность того, что в течение двух часов в мастерскую обратятся не менее 4 клиентов.

2.8. Дискретная случайная величина

Задачи 2.8.1–2.8.5. Дискретная случайная величина X задана законом распределения. Необходимо: 1) построить многоугольник распределения вероятностей; 2) найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график; 3) вычислить числовые характеристики случайной величины: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

2.8.1.

X	–3	–1	2	4	7
P	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

2.8.2.

X	–4	–2	0	3	6
P	0,2	0,3	0,2	0,1	0,2

2.8.3.

X	–4	–1	1	4	5
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

2.8.4.

X	0	1	2	5	8
P	0,3	0,2	0,2	0,2	0,1

2.8.5.

X	–2	–1	2	3	6
P	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

2.8.6. Проводится 4 независимых испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0,7. Составить закон распределения случайной величины – числа появления события A в этих испытаниях. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

2.8.7. В урне находятся 5 красных и 3 белых шара. Составить закон распределения случайной величины – числа красных шаров из 3 вынутых из урны. Построить многоугольник распределения вероятностей, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

2.8.8. Вероятность успешной сдачи первого экзамена для студента равна 0,8; второго экзамена – 0,9; третьего – 0,7. Составить закон распределения случайной величины – числа сданных экзаменов. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

2.8.9. На пути движения автомобиля находятся светофоры, каждый из которых с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает автомашине дальнейшее движение. Составить закон распределения случайной величины – числа светофоров, пройденных автомашиной без остановки.

2.8.10. Банк выдает 5 кредитов. Вероятность возврата кредита в срок равна 0,8 для каждого из заемщиков. Составить закон распределения случайной величины – числа заемщиков, вернувших кредит по окончании срока. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

2.8.11. Партия из 9 изделий содержит 5 стандартных. Наудачу отбирают 4 изделия. Составить закон распределения случайной величины – числа стандартных изделий среди отобранных. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

2.8.12. Вероятность выполнить норму мастера спорта для первого спортсмена равна 0,6; второго – 0,8; третьего – 0,5. Составить закон распределения случайной величины – числа спортсменов, выполнивших норму мастера спорта. Вычислить числовые характеристики случайной величины.

2.8.13. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Стрелок производит выстрелы до первого попадания. Составить закон распределения случайной величины – числа произведенных выстрелов до первого попадания.

2.8.14. Составить закон распределения случайной величины – числа выпадения герба при подбрасывании монеты 5 раз. Построить многоугольник распределения вероятностей и вычислить числовые характеристики случайной величины.

2.8.15. В ящике находится 9 желтых и 6 белых мячей. Составить закон распределения случайной величины – числа желтых мячей из 4 взятых из ящика. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

2.8.16. Мастер обслуживает три станка. Вероятность безотказной работы в течение смены для первого станка равна 0,8; для второго – 0,7; для третьего – 0,75. Составить закон распределения случайной величины – числа безотказно работающих станков в течение смены. Вычислить числовые характеристики случайной величины.

2.8.17. Всхожесть семян гречихи составляет 70 %. Составить закон распределения случайной величины – числа семян, дающих всходы из 4 высаженных. Вычислить числовые характеристики случайной величины.

2.8.18. В партии из 8 изделий имеется 3 изделия высшего сорта. Наудачу отобраны 4 изделия. Составить закон распределения случайной величины – числа изделий высшего сорта среди отобранных. Построить многоугольник распределения вероятностей и вычислить числовые характеристики случайной величины.

2.8.19. Две игральные кости бросают одновременно. Составить закон распределения случайной величины – числа выпадений цифр, кратных 3, на двух игральных костях. Построить многоугольник распределения вероятностей, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

2.8.20. Контрольная работа включает три задачи. Вероятность правильного решения студентом первой задачи равна 0,9; второй – 0,7; третьей – 0,3. Составить закон распределения случайной величины – числа правильно решенных задач в контрольной работе. Вычислить числовые характеристики случайной величины.

2.8.21. Ящик с картофелем содержит 10 % поврежденных клубней. Наудачу выбирают 4 клубня. Составить закон распределения случайной величины – числа неповрежденных клубней среди отобранных. Вычислить числовые характеристики случайной величины.

2.8.22. В студенческой группе учится 14 девушек и 6 юношей. Преподаватель случайным образом вызывает к доске 5 студентов. Составить закон распределения случайной величины – числа опрошенных девушек. Построить многоугольник распределения вероятностей, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

2.8.23. Покупатель приобретает три лотерейных билета. Вероятность выигрыша по первому билету равна 0,1; по второму – 0,2; по третьему – 0,15. Составить закон распределения случайной величины – числа выигрышей в лотерею. Вычислить числовые характеристики случайной величины.

2.8.24. Спортсмен, имеющий 5 патронов, стреляет по цели до первого попадания. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,6. Составить закон распределения случайной величины – числа произведенных выстрелов. Вычислить числовые характеристики случайной величины.

2.8.25. В магазин на продажу поступили телевизоры марки LG и Sony. Причем телевизоров LG в 2 раза больше, чем телевизоров Sony. Куплено 4 телевизора. Составить закон распределения случайной величины – числа купленных телевизоров марки LG. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

2.8.26. В поле работают 3 комбайна. Вероятность поломки первого комбайна равна 0,2; второго – 0,15; третьего – 0,25. Составить закон распределения случайной величины – числа комбайнов, работающих исправно. Вычислить числовые характеристики случайной величины.

2.8.27. В клубе по вольной борьбе тренируются 4 девушки и 8 юношей. Формируется команда из 5 человек. Составить закон распределения случайной величины – числа девушек, вошедших в команду.

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

2.8.28. На линию огня вызываются 2 стрелка. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,4; для второго – 0,7. Первый стрелок делает 2 выстрела, второй – 1 выстрел. Составить закон распределения случайной величины – числа попаданий в мишень. Вычислить числовые характеристики случайной величины.

2.8.29. В ящике из 8 изделий имеется 1 бракованное. Для его обнаружения наугад достают одно изделие за другим. Составить закон распределения случайной величины – числа попыток до обнаружения бракованного изделия. Вычислить числовые характеристики случайной величины.

2.8.30. Имеется 5 ключей, из которых только один подходит к замку. Составить закон распределения случайной величины – числа попыток при открывании замка, если ключ, не подошедший к замку, в дальнейшем не используется. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

2.9. Непрерывная случайная величина

Задачи 2.9.1 – 2.9.20. Случайная величина задана функцией распределения $F(x)$. Требуется:

1) найти плотность распределения вероятностей $f(x)$;

2) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

3) вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины;

4) вычислить вероятность попадания случайной величины в интервал $(x_1; x_2)$

2.9.1. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0,\\ \dfrac{x^2}{25}, & \text{если} \quad 0\le x\le 5,\\ 1, & \text{если} \quad x>5,\end{cases}$ $(2; 4)$.

2.9.2. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0,\\ \dfrac{x^2}{36}, & \text{если} \quad 0\le x\le 6,\\ 1, & \text{если} \quad x>6,\end{cases}$ $(0; 3)$.

2.9.3. $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0,\\ \dfrac{x}{4}, & \text{если} \quad 0\le x\le 4,\\ 1, & \text{если} \quad x>4,\end{cases}$ $(1; 2)$.

2.9.4. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0, \\ 2x, & \text{если} \quad 0\le x\le \dfrac{1}{2}, \\ 1, & \text{если} \quad x>\dfrac{1}{2}, \end{cases}$ $\quad (1;\ \dfrac{1}{3})$.

2.9.5. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<-2, \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}, & \text{если} \quad -2\le x\le 2, \\ 1, & \text{если} \quad x>2, \end{cases}$ $\quad (–1;\ 0)$.

2.9.6. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0, \\ \dfrac{1}{2}(x^2+x), & \text{если} \quad 0\le x\le 1, \\ 1, & \text{если} \quad x>1, \end{cases}$ $\quad (1;\ \dfrac{1}{2})$.

2.9.7. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<1, \\ \dfrac{1}{3}(x^2-1), & \text{если} \quad 1\le x\le 2, \\ 1, & \text{если} \quad x>2, \end{cases}$ $\quad (1;\dfrac{3}{2})$.

2.9.8. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<2, \\ \dfrac{1}{3}(x^2-2x), & \text{если} \quad 2\le x\le 3, \\ 1, & \text{если} \quad x>3, \end{cases}$ $\quad (\dfrac{3}{2};\ 2)$.

2.9.9. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0, \\ \dfrac{x^2}{64}, & \text{если} \quad 0\le x\le 8, \\ 1, & \text{если} \quad x>8, \end{cases}$ $\quad (4;\ 8)$.

2.9.10. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0, \\ 3x, & \text{если} \quad 0\le x\le \dfrac{1}{3}, \\ 1, & \text{если} \quad x>\dfrac{1}{3}, \end{cases}$ $\quad (\dfrac{1}{6};\ \dfrac{1}{3})$.

2.9.11. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<-1, \\ \frac{1}{3}(x+1), & \text{если} \quad -1\le x\le 2, \\ 1, & \text{если} \quad x>2, \end{cases}$ $(-1;\ 0)$.

2.9.12. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0, \\ \sin(x), & \text{если} \quad 0\le x\le \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{если} \quad x>\frac{\pi}{2}, \end{cases}$ $(0;\ \frac{\pi}{6})$.

2.9.13. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0, \\ 2x-x, & \text{если} \quad 0\le x\le 1, \\ 1, & \text{если} \quad x>1, \end{cases}$ $(\frac{1}{2};\ 1)$.

2.9.14. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<-2, \\ \frac{1}{4}(x+2), & \text{если} \quad -2\le x\le 2, \\ 1, & \text{если} \quad x>2, \end{cases}$ $(-2;\ 0{,}5)$.

2.9.15. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0, \\ x^3, & \text{если} \quad 0\le x\le 1, \\ 1, & \text{если} \quad x>1, \end{cases}$ $(\frac{1}{4};\ \frac{1}{2})$.

2.9.16. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<-\frac{\pi}{2}, \\ \sin(2x), & \text{если} \quad -\frac{\pi}{2}\le x\le 0, \\ 1, & \text{если} \quad x>0, \end{cases}$ $(-\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{4})$.

2.9.17. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0, \\ \sin(2x), & \text{если} \quad 0\le x\le \dfrac{\pi}{4}, \\ 1, & \text{если} \quad x>\dfrac{\pi}{4}, \end{cases}$ $\left(\dfrac{\pi}{12};\ \dfrac{\pi}{4}\right)$.

2.9.18. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0, \\ \dfrac{x^2}{100}, & \text{если} \quad 0\le x\le 10, \\ 1, & \text{если} \quad x>10, \end{cases}$ (1; 6).

2.9.19. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0, \\ 1-\cos(x), & \text{если} \quad 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{если} \quad x>\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$ $\left(0;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$.

2.9.20. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<3, \\ \dfrac{x}{3}-1, & \text{если} \quad 3\le x\le 6, \\ 1, & \text{если} \quad x>6, \end{cases}$ (4,5; 6).

Задачи 2.9.21–2.9.30. Случайная величина задана функцией плотности распределения вероятностей $f(x)$. Требуется:

1) найти значение постоянной c;

2) найти функцию распределения $F(x)$;

3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$;

4) вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

2.9.21. $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<-2, \\ 2c, & \text{если} \quad -2\le x\le 2, \\ 0, & \text{если} \quad x>2. \end{cases}$

2.9.22. $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<-3, \\ \dfrac{c}{8}, & \text{если} \quad -3\le x\le 1, \\ 0, & \text{если} \quad x>1. \end{cases}$

2.9.23. $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0, \\ cx, & \text{если} \quad 0\le x\le 8, \\ 0, & \text{если} \quad x>8. \end{cases}$

2.9.24. $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<1, \\ c(x-1), & \text{если} \quad 1\le x\le 3, \\ 0, & \text{если} \quad x>3. \end{cases}$

2.9.25. $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0, \\ c(2x+1), & \text{если} \quad 0\le x\le 3, \\ 0, & \text{если} \quad x>3. \end{cases}$

2.9.26. $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0, \\ \dfrac{x^2}{c}, & \text{если} \quad 0\le x\le 3, \\ 0, & \text{если} \quad x>3. \end{cases}$

2.9.27. $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<1, \\ c(3x^2-1), & \text{если} \quad 1\le x\le 2, \\ 0, & \text{если} \quad x>2. \end{cases}$

2.9.28. $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<-\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\cos x}{c}, & \text{если} \quad -\dfrac{\pi}{2}\le x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{если} \quad x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

2.9.29. $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<-2, \\ \dfrac{x+2}{c}, & \text{если} \quad -2\le x\le 2, \\ 0, & \text{если} \quad x>2. \end{cases}$

2.9.30. $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0, \\ c\sin 2x, & \text{если} \quad 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{если} \quad x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

2.10. Нормальный закон распределения

2.10.1. Глубина посева семян считается нормальной случайной величиной со средним квадратическим отклонением 0,8 см. Средняя глубина посева семян составляет 5 см. Определить: 1) процент семян, посеянных на глубину более 7 см; 2) процент семян, посеянных на глубину менее 4 см.

2.10.2. При изготовлении изделия его вес подвержен случайным колебаниям и распределен по нормальному закону. Стандартный вес изделия равен 40 г, среднее квадратическое отклонение равно 0,9 г. Найти: 1) вероятность того, что вес наудачу выбранного изделия находится в пределах от 38 до 41 г; 2) величину, которую не превысит вес наудачу взятого изделия с вероятностью 0,98.

2.10.3. На станке изготовляются втулки. Длина втулки представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону, с математическим ожиданием 25 см и средним квадратическим отклонением 0,3 см. Найти: 1) процент втулок, длина которых заключена между 24,7 и 25,6 см; 2) величину, которую не превысит длина наудачу взятой втулки с вероятностью 0,95.

2.10.4. Считается, что длина изготавливаемых деталей является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Длина стандартной детали равна 35 см, а среднее квадратическое отклонение 0,7 см. Найти: 1) процент деталей, длина которых заключена в промежутке от 33,6 и 36,4 см; 2) величину, которую не превысит длина наудачу взятой детали с вероятностью 0,9.

2.10.5. Случайные значения веса зерна распределены нормально. Математическое ожидание веса зерна равно 0,16 г, среднее квадратическое отклонение равно 0,04 г. Нормальные всходы дают зерна, вес которых более 0,09 г. Определить: 1) процент семян, которые дадут нормальные всходы; 2) величину, которую не превзойдет вес отдельного зерна с вероятностью 0,99.

2.10.6. Вес зерна является случайной величиной, распределенной нормально. Математическое ожидание веса зерна равно 0,2 г, среднее квадратическое отклонение равно 0,05 г. Зерна с весом от 0,11 до 0,21 г относят к семенам средней категории, а с весом более 0,21 г – к семенам высшей категории. Найти проценты семян средней и высшей категории.

2.10.7. Станок изготавливает детали, фактический размер которых является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Проектный размер детали равен 25 см, среднее квадратическое отклонение 0,6 см. Годными считаются детали, размер которых заключен между 23,5 и 26,2 см. Определить: 1) процент изготовления годных деталей; 2) процент бракованных деталей, если точность изготовления ухудшится и будет характеризоваться средним квадратическим отклонением 0,8 мм.

2.10.8. Установлено, что потери зерна при уборке являются случайной величиной, распределенной нормально. В среднем потери зерна составили 4 г на 1 м^2, среднее квадратическое отклонение потерь составляет 0,8 г. Определить: 1) вероятность того, что на 1 га (10 000 м^2) потери зерна составят не более 40,2 кг; 2) величину, которую не превзойдут потери на 1 га с вероятностью 0,99.

2.10.9. Распределение хозяйств некоторого района по проценту выполнения плана продажи продукции государству подчинено нормальному закону распределения с математическим ожиданием 101,3 % и средним квадратическим отклонением 1,5 %. Определить: 1) процент хозяйств, перевыполнивших план; 2) величину, которую не превзойдет процент выполнения плана наудачу взятого хозяйства с вероятностью 0,98.

2.10.10. Высота деревьев в некоторой роще подчиняется нормальному закону с математическим ожиданием 8 м и средним квадратическим отклонением 1,5 м. Определить: 1) процент деревьев рощи, высота которых превышает 10 м; 2) величину, которую не превысит высота наудачу взятого дерева с вероятностью 0,96.

2.10.11. Длина рыбы в пруду является случайной величиной, распределенной нормально с математическим ожиданием 35 см и средним квадратическим отклонением 5 см. Определить: 1) процент рыб, длина которых заключена между 28 и 42 см; 2) величину, которую не превысит длина наудачу выловленной рыбы с вероятностью 0,97.

2.10.12. Вес коров является случайной величиной, распределенной нормально с математическим ожиданием 480 кг и средним квадратическим отклонением 24 кг. Определить: 1) процент коров, имеющих вес свыше 505 кг; 2) величину, которую не превысит вес наудачу выбранной коровы с вероятностью 0,99.

2.10.13. Вес ящика с грушами является случайной величиной, распределенной нормально. Средний вес фруктов в одном ящике равен 15 кг, а среднее квадратическое отклонение одного ящика 2 кг. Определить: 1) вероятность того, что вес 100 ящиков окажется не более 1,52 т; 2) наибольшее значение, которое не превысит вес фруктов в 100 ящиках с вероятностью 0,98.

2.10.14. Диаметр валиков, изготовленных на станке-автомате, подчинен нормальному закону с математическим ожиданием 12 мм и средним квадратическим отклонением 0,4 мм. Годными считаются те валики, диаметр которых заключен между 11,3 и 12,7 мм. Определить: 1) процент годных валиков; 2) процент бракованных валиков, если точность изготовления улучшится и будет характеризоваться средним квадратическим отклонением 0,3 мм.

2.10.15. За один рейс автомашина перевозит в среднем 3,5 т груза. Вес груза считается нормально распределенной случайной величиной и характеризуется средним квадратическим отклонением 0,5 т. Определить: 1) вероятность того, за 100 рейсов будет перевезено не менее 345 т груза; 2) величину, которую не превзойдет вес перевезенного груза за 100 рейсов с вероятностью 0,99.

2.10.16. Рост женщин является случайной величиной, распределенной нормально с математическим ожиданием 165 см и средним квадратическим отклонением 5 см. Определить: 1) процент женщин, имеющих рост не ниже 170 см; 2) величину, которую не превзойдет рост случайно выбранной женщины с вероятностью 0,97.

2.10.17. Вес яблок является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Средний вес одного яблока равен 150 г; отклонения в весе характеризуются средним квадратическим отклонением 20 г. Определить: 1) вероятность того, что вес 100 случайно отобранных яблок окажется не более 15,3 кг; 2) наибольшее значение, которое не превзойдет вес 100 яблок с вероятностью 0,95.

2.10.18. Диаметр подшипников, изготовленных на заводе, считается случайной величиной, распределенной нормально с математическим ожиданием 1,8 см и средним квадратическим отклонением 0,05 см. Определить: 1) вероятность того, что размер наудачу взятого подшипника колеблется от 1,7 до 1,9 см; 2) величину, которую не превысит диаметр наудачу взятого подшипника с вероятностью 0,98.

2.10.19. Установлено, что погрешность измерения диаметра детали микрометром является нормальной случайной величиной со средним квадратическим отклонением 0,1 мм. Систематической погрешностью прибора можно пренебречь. Найти процент измерений, производимых с ошибкой, не превышающей по абсолютной величине 0,23 мм.

2.10.20. Срок службы прибора представляет собой случайную величину, распределенную нормально с математическим ожиданием 10 лет и средним квадратическим отклонением 1,5 года. Определить: 1) вероятность того, что прибор прослужит не менее 12 лет; 2) величину, которую не превзойдет срок службы прибора с вероятностью 0,99.

2.10.21. Вес теленка при рождении считается случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Средний вес теленка при рождении составляет 35 кг, среднее квадратическое отклонение равно 4 кг. Определить: 1) процент телят, имеющих при рождении вес не ниже 32 кг; 2) величину, которую не превысит вес теленка при рождении с вероятностью 0,95.

2.10.22. Норма высева на 1 га равна 180 кг. Случайные значения веса высеваемых семян на 1 га распределены нормально и характеризуются средним квадратическим отклонением 12 кг. Определить: 1) вероятность того, что расход семян на 100 га не превысит 18,15 т; 2) вес семян, обеспечивающий посев 100 га с вероятностью 0,99.

2.10.23. Автомат штампует детали для сеялки, длина которых является случайной величиной, распределенной нормально со средним квадратическим отклонением 3 мм. Проектная длина детали равна 50 мм. Годными считаются детали, длина которых составляет не менее 44 мм и не более 58 мм. Определить: 1) вероятность изготовления годной детали; 2) процент брака, если точность станка-автомата снизится и будет характеризоваться средним квадратическим отклонением 4 мм.

2.10.24. Распределение пакетов по весу расфасованного товара подчинено нормальному закону с математическим ожиданием 2 кг и средним квадратическим отклонением 0,01 кг. Определить: 1) процент пакетов, имеющих вес товара не меньше 1,99 кг; 2) наибольшее значение, которое не превзойдет вес пакета с вероятностью 0,98.

2.10.25. Коробки с конфетами упаковываются автоматически. Вес коробки считается нормально распределенной случайной величиной со средним квадратическим отклонением 10 г. Средний вес одной коробки равен 300 г. Определить: 1) процент коробок, вес которых не более 305 г; 2) наибольшее значение, которое не превзойдет вес коробки с вероятностью 0,97.

2.10.26. Производится взвешивание расфасованного товара без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением 20 г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 25 г.

2.10.27. Диаметры деталей, выпускаемых в цеху, распределены по нормальному закону, с дисперсией 1,21 см^2. Проектный диаметр детали равен 12 см. Определить: 1) процент деталей, диаметр которых отклоняется от проектного не более чем на 2 см; 2) наибольшее значение, которое не превзойдет диаметр случайно выбранной детали с вероятностью 0,96.

2.10.28. Поезд состоит из 36 вагонов. Вес каждого вагона считается случайной величиной, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием 50 т и средним квадратическим отклонением 0,5 т. Определить: 1) вероятность того, что вес всего состава не превысит 1 805 т; 2) наибольшее значение, которое не превзойдет вес состава с вероятностью 0,99.

2.10.29. Затраты времени на шлифовку детали подчиняются нормальному закону с математическим ожиданием 60 сек и средним квадратическим отклонением 5 сек. Определить: 1) вероятность того, что продолжительность обработки случайно выбранной детали будет не меньше 52 сек; 2) величину, которую не превзойдет продолжительность обработки детали с вероятностью 0,97.

2.10.30. Случайные значения веса зерна распределены нормально со средним квадратическим отклонением 0,06 г. Среднее значение веса зерна равно 0,2 г. Нормальные всходы дают зерна, вес которых более 0,11 г. Определить: 1) процент семян, которые дадут нормальные всходы; 2) процент семян, отклонение которых от среднего значения не превзойдет 0,09 г.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Значения функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2903	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2526	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1985	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0112	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Значения функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*	*x*	*Φ(x)*
0,00	0,0000	0,39	0,1517	0,78	0,2823	1,17	0,3790
0,01	0,0040	0,40	0,1554	0,79	0,2852	1,18	0,3810
0,02	0,0080	0,41	0,1591	0,80	0,2881	1,19	0,3830
0,03	0,0120	0,42	0,1628	0,81	0,2910	1,20	0,3849
0,04	0,0160	0,43	0,1664	0,82	0,2939	1,21	0,3869
0,05	0,0199	0,44	0,1700	0,83	0,2967	1,22	0,3883
0,06	0,0239	0,45	0,1736	0,84	0,2995	1,23	0,3907
0,07	0,0279	0,46	0,1772	0,85	0,3023	1,24	0,3925
0,08	0,0319	0,47	0,1808	0,86	0,3051	1,25	0,3944
0,09	0,0359	0,48	0,1884	0,87	0,3078	1,26	0,3962
0,10	0,0398	0,49	0,1879	0,88	0,3106	1,27	0,3980
0,11	0,0438	0,50	0,1915	0,89	0,3133	1,28	0,3839
0,12	0,0478	0,51	0,1950	0,90	0,3159	1,29	0,4015
0,13	0,0517	0,52	0,1985	0,91	0,3186	1,30	0,4032
0,14	0,0557	0,53	0,2019	0,92	0,3212	1,31	0,4049
0,15	0,0596	0,54	0,2954	0,93	0,3238	1,32	0,4066
0,16	0,0636	0,55	0,2088	0,94	0,3264	1,33	0,4082
0,17	0,0675	0,56	0,2123	0,95	0,3289	1,34	0,4099
0,18	0,0714	0,57	0,2157	0,96	0,3315	1,35	0,4115
0,19	0,0753	0,58	0,2190	0,97	0,3340	1,36	0,4131
0,20	0,0793	0,59	0,2224	0,98	0,3365	1,37	0,4147
0,21	0,0832	0,60	0,2257	0,99	0,3389	1,38	0,4162
0,22	0,0871	0,61	0,2291	1,00	0,3413	1,39	0,4177
0,23	0,0910	0,62	0,2324	1,01	0,3438	1,40	0,4192
0,24	0,0948	0,63	0,2357	1,02	0,3461	1,41	0,4207
0,25	0,0987	0,64	0,2389	1,03	0,3485	1,42	0,4222
0,26	0,1026	0,65	0,2422	1,04	0,3508	1,43	0,4236
0,27	0,1064	0,66	0,2454	1,05	0,3531	1,44	0,4251
0,28	0,1103	0,67	0,2486	1,06	0,3554	1,45	0,4265
0,29	0,1141	0,68	0,2517	1,07	0,3577	1,46	0,4279
0,30	0,1179	0,69	0,2549	1,08	0,3599	1,47	0,4292
0,31	0,1217	0,70	0,2580	1,09	0,3621	1,48	0,4306
0,32	0,1255	0,71	0,2611	1,10	0,3643	1,49	0,4313
0,33	0,1293	0,72	0,2642	1,11	0,3665	1,50	0,4332
0,34	0,1331	0,73	0,2673	1,12	0,3686	1,51	0,4335
0,35	0,1368	0,74	0,2703	1,13	0,3708	1,52	0,4357
0,36	0,1406	0,75	0,2734	1,14	0,3729	1,53	0,4370
0,37	0,1443	0,76	0,2764	1,15	0,3749	1,54	0,4382
0,38	0,1480	0,77	0,2794	1,16	0,3770	1,55	0,4394

П р о д о л ж е н и е п р и л. 2

x	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*	*x*	*Ф(x)*
1,56	0,4406	1,82	0,4656	2,16	0,4846	2,68	0,4963
1,57	0,4418	1,83	0,4664	2,18	0,4854	2,70	0,4965
1,58	0,4429	1,84	0,4671	2,20	0,4861	2,72	0,4967
1,59	0,4441	1,85	0,4678	2,22	0,4868	2,74	0,4969
1,60	0,4452	1,86	0,4686	2,24	0,4875	2,76	0,4971
1,61	0,4463	1,87	0,4693	2,26	0,4881	2,78	0,4973
1,62	0,4474	1,88	0,4699	2,28	0,4887	2,80	0,4974
1,63	0,4484	1,89	0,4706	2,30	0,4893	2,82	0,4976
1,64	0,4495	1,90	0,4713	2,32	0,4898	2,84	0,4977
1,65	0,4505	1,91	0,4719	2,34	0,4904	2,86	0,4979
1,66	0,4515	1,92	0,4726	2,36	0,4909	2,88	0,4980
1,67	0,4525	1,93	0,4732	2,38	0,4913	2,90	0,4981
1,68	0,4535	1,94	0,4738	2,40	0,4918	2,92	0,4982
1,69	0,4545	1,95	0,4744	2,42	0,4922	2,94	0,4984
1,70	0,4554	1,96	0,4750	2,44	0,4927	2,96	0,4985
1,71	0,4564	1,97	0,4756	2,46	0,4931	2,98	0,4986
1,72	0,4573	1,98	0,4761	2,48	0,4934	3,00	0,49865
1,73	0,4582	1,99	0,4767	2,50	0,4938	3,20	0,49931
1,74	0,4591	2,00	0,4772	2,52	0,4941	3,40	0,49966
1,75	0,4599	2,02	0,4783	2,54	0,4945	3,60	0,499841
1,76	0,4608	2,04	0,4793	2,56	0,4948	3,80	0,499928
1,77	0,4616	2,06	0,4803	2,58	0,4951	4,00	0,499968
1,78	0,4625	2,08	0,4812	2,60	0,4953	4,50	0,499997
1,79	0,4633	2,10	0,4821	2,62	0,4956	5,00	0,499999
1,80	0,4641	2,12	0,4830	2,64	0,4959		
1,81	0,4649	2,14	0,4838	2,66	0,4961		

П р и л о ж е н и е 3

Значения функции $\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

k	λ					
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
1	2	3	4	5	6	7
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4		0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030
5				0,0001	0,0002	0,0004

Продолжение прил. 3

k	λ					
	0,7	0,8	0,9	1, 0	2,0	3,0
1	8	9	10	11	12	13
0	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679	0,1353	0,0498
1	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679	0,2707	0,1494
2	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839	0,2707	0,2240
3	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613	0,1804	0,2240
4	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153	0,0902	0,1680
5	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031	0,0361	0,10008
6	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0120	0,0504
7				0,0001	0,0034	0,0216
8					0,0009	0,0081
9					0,0002	0,0027
10						0,0008
11						0,0002
12						0,0001

Окончание прил. 3

k	λ					
	4,0	5,0	6,0	7, 0	8,0	9,0
1	14	15	16	17	18	19
0	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
1	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
2	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050
3	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
4	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337
5	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
6	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
7	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171
8	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
9	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318
10	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186
11	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970
12	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728
13	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504
14	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324
15		0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194
16		0,0001	0,0003	0,0015	0,0045	0,0109
17			0,0001	0,0006	0,0021	0,0058

СОДЕРЖАНИЕ

У ч е б н о е и з д а н и е

Воронкова Татьяна Борисовна
Курзенков Сергей Владимирович

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ