ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Методические указания для аудиторной и самостоятельной работы студентов, обучающихся по специальности 7-07-0732-01 Строительство зданий и сооружений

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Решение систем уравнений является одной из наиболее часто встречающихся вычислительных задач. В методических указаниях рассмотрены прямые (точные) и итерационные методы численного решения систем уравнений. Весь материал разбит на разделы, в которых содержится описание рассмотренных методов. Методические указания включают в себя набор заданий, рекомендуемых для решения на практических занятиях, и вопросы для закрепления теоретического материала. Все приведенные вычислительные схемы проиллюстрированы решениями типовых примеров в распространенных прикладных пакетах программ Excel и MathCad.

Данные методические указания представляют собой руководство по изучению основных математических методов приближенного решения систем уравнений на ЭВМ и рекомендуются для студентов мелиоративно-строительного факультета специальности 07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений». Кроме этого, они могут быть использованы магистрантами и аспирантами в качестве пособия для самостоятельного изучения и закрепления материала по рассматриваемой теме с последующим применением приведенных методов для решения конкретных производственных задач.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы [Электронный ресурс] / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – Электрон. текстовые данные. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. – 639 с. – Режим доступа: https://csc-knu.github.io/numerical-analysis/books/bahvalov-zhidkov-kobelkov-2015.pdf

2. Зенков, А. В. Численные методы : учеб. пособие / А. В. Зенков. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2016. – 124 с.

1. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

1.1. Общая характеристика методов решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Методы решения СЛАУ делятся на две группы:

– точные (или прямые) методы, представляющие собой конечные алгоритмы для вычисления корней системы (матричный метод, метод Гаусса, метод квадратного корня, метод прогонки и т. д.);

– итерационные методы, позволяющие получить решение системы с заданной точностью путем сходящихся итерационных процессов (метод простой итерации, метод Якоби, метод Зейделя и др.).

Задача решения СЛАУ теоретически решается просто. Однако при большом порядке матрицы решение требует большого объема вычислений и, как следствие, использования ЭВМ. Из-за появления погрешностей округления при решении задач на ЭВМ прямые методы на самом деле не приводят к точному решению СЛАУ и называть их точными, можно лишь отвлекаясь от погрешностей округления. Сопоставление различных прямых методов проводится обычно по числу арифметических действий. При прочих равных условиях предпочтение отдается методу с меньшим числом действий.

Нужно понимать, что эффективность применения итерационных методов существенно зависит от выбора начального приближения и скорости сходимости итерационного процесса. Использовании таких методов в решении задач предполагает приближенный результат, в котором заведомо заложены как ошибки округления исходных данных, так и погрешность самого метода решения.

1.2. Матричный метод решения СЛАУ

Рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (1)$$

В матричном виде система (1) представляется равенством

$$A \cdot x = b \ , \quad (2)$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \cdots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Матрица A, столбцами которой являются коэффициенты при соответствующих переменных в уравнениях системы, называется матрицей системы.

Матрица-столбец b состоит из свободных членов системы (1) и называется матрицей правой части.

Матрица-столбец x, элементы которой – искомые неизвестные, называется решением системы.

Если матрица A невырожденная, т.е. $\det A \neq 0$, то система (1) или матричное уравнение (2) имеет единственное решение. Пусть $\det A \neq 0$. Тогда существует обратная матрица A^{-1}. Умножая обе части уравнения (2) слева на матрицу A^{-1}, получим

$$A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b\,, \tag{3}$$

$$x = A^{-1} \cdot b\,. \tag{4}$$

Формула (4) дает единственное решение системы (2).

Пример. Решить систему линейных алгебраических уравнений в EXCEL и MathCAD:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 = -0,3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0,7, \\ 5x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -0,1, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = -0,5, \\ 4x_1 + x_2 + x_5 = 0,3. \end{cases}$$

Решение.

1. Чтобы решить заданную систему матричным способом (рис. 1), выпишем на лист Excel матрицу коэффициентов A в блок ячеек **A2:E6** и столбец свободных членов b в блок ячеек **G2:G6**.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Матрица коэффициентов**						**Столбец B**
2	1	-1	2	-3	4		-0,3
3	3	1	1	-1	-1		0,7
4	0	5	1	-2	-3		-0,1
5	1	2	-2	-1	1		-0,5
6	4	1	0	0	1		0,3
7							
8	**Обратная матрица**						**Решение**
9	-0,034	0,23	-0,08	0,039	0,076		0,182984
10	0,01	-0,455	0,257	-0,09	0,361		-0,19476
11	0,11	-0,283	0,194	-0,43	0,293		0,054974
12	-0,107	-0,581	0,12	-0,34	0,547		-0,05366
13	0,126	-0,466	0,079	-0,07	0,335		-0,23717

Рис. 1.

Для нахождения обратной матрицы в свободном месте этого же листа выделим блок ячеек, соответствующий размерности матрицы *A*, например **A9:E13**, активизируем кнопку **Мастер функций** на панели кнопок и в категории **Математические** выберем функцию **МОБР()**. В качестве аргумента этой функции введем блок ячеек с элементами матрицы *A*, т. е. **A2:E6** и одновременно нажмем три клавиши **<CTRL>+ +<SHIFT>+<ENTER>**. В результате этих действий в ячейках **A9:E13** появятся значения обратной матрицы. Аналогичным образом с помощью функции **МУМНОЖ()** найдем вектор решения $x = A^{-1}b$. Для этого в свободном месте рабочего листа, например **G9:G13**, выделим блок ячеек, совпадающий с размерностью столбца *b*, выберем функцию **МУМНОЖ()**, указав в качестве первого аргумента блок ячеек **A9:E13**, в котором находится обратная матрица, а в качестве второго аргумента – блок ячеек **G2:G6** (столбец *b*). Для получения результата нажмем **<CTRL>+<SHIFT>+<ENTER>**. В ячейках **G9:G13** появится результат. На рис. 2 показан макет расчетной таблицы.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Матрица коэффициентов**						**Столбец B**
2	1	-1	2	-3	4		-0,3
3	3	1	1	-1	-1		0,7
4	0	5	1	-2	-3		-0,1
5	1	2	-2	-1	1		-0,5
6	4	1	0	0	1		0,3
7							
8	**Обратная матрица**						**Решение**
9	=МОБР(A2:E6)	=М(	=М	=М	=МОБР(A2:E6)		=МУМНОЖ(A9:E13;G2:G6)
10	=МОБР(A2:E6)	=М(	=М	=М	=МОБР(A2:E6)		=МУМНОЖ(A9:E13;G2:G6)
11	=МОБР(A2:E6)	=М(	=М	=М	=МОБР(A2:E6)		=МУМНОЖ(A9:E13;G2:G6)
12	=МОБР(A2:E6)	=М(	=М	=М	=МОБР(A2:E6)		=МУМНОЖ(A9:E13;G2:G6)
13	=МОБР(A2:E6)	=М(	=М	=М	=МОБР(A2:E6)		=МУМНОЖ(A9:E13;G2:G6)

Рис. 2.

2. Покажем два варианта решения заданной системы в MathCAD. Решение системы матричным способом показано на рис. 3.

В пакете MathCAD предусмотрена специальная функция для решения СЛАУ. Функция **lsolve(***A*, *b***)** возвращает вектор *x*, такой что $A \cdot x = b$ для заданной матрицы *A* и вектора *b*. На рис. 4 показано решение системы в MathCAD с помощью функции **lsolve**.

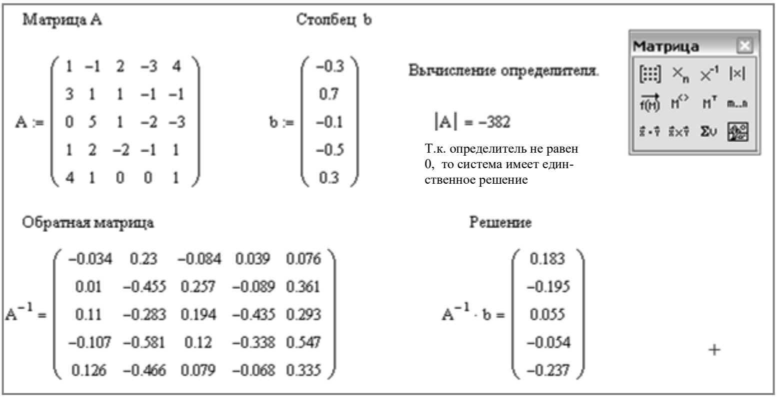

Рис. 3.

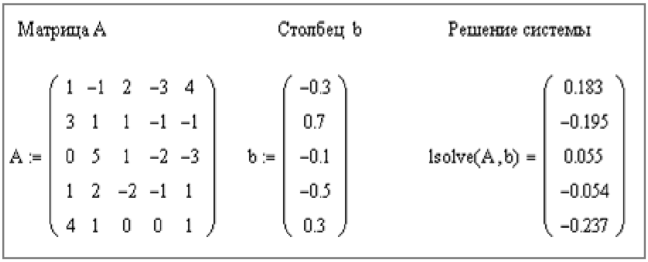

Рис. 4.

1.3. Решение СЛАУ методом Гаусса

Метод Гаусса является одним из методов исключения. Решение методами исключения осуществляется поэтапно. На первом этапе систему преобразуют к простому виду, на втором – решают упрощенную систему и по рекуррентным формулам получают значения неизвестных.

Пусть задана система (2). Идея метода Гауссовых исключений заключается в отыскании системы матриц $L_k, L_{k-1}, \ldots, L_1$ таких, что матрица $B = L_k \cdot L_{k-1} \cdot \ldots \cdot L_1 \cdot A$ будет иметь один из перечисленных видов:

1) диагональная матрица;
2) треугольная матрица;
3) унитарная (ортогональная) матрица.

Если все матрицы L_i невырожденные, то система (2) преобразуется в эквивалентную систему

$$B \cdot x = C, \tag{5}$$

где $B = L_k \cdot L_{k-1} \cdot \ldots \cdot L_1 \cdot A$, $C = L_k \cdot L_{k-1} \cdot \ldots \cdot L_1 \cdot b$.

Если B – диагональная матрица, то решение системы (1) находят непосредственно из системы (5).

Если B – треугольная, решение системы (1) находим, решая систему (5).

Если B – унитарная, то умножая систему (5) слева на сопряженную матрицу B^*, получаем решение в явном виде.

Одним из наиболее распространенных методов, основанных на указанных выше преобразованиях, является метод Гаусса, в котором исключение неизвестных производится с помощью левых треугольных матриц L_i и искомая система приводится к эквивалентной с правой (верхнетреугольной) треугольной матрицей.

Метод Гаусса является оптимальным по быстродействию и почти универсальным по отношению к свойствам матрицы A. Наибольшее распространение имеют схемы Гаусса с выбором главных элементов: 1) по строке; 2) по столбцу; 3) по всей матрице.

Если нет необходимости в выборе главных элементов каким-либо специальным образом, целесообразно применять схему единственного деления, которая уступает всем трем в точности, но выигрывает в простоте вычислений.

Пусть задана система (1). Рассмотрим метод Гаусса (схема единственного деления) решения системы уравнений.

Прямой ход состоит из n – 1 шагов исключения.

1-й шаг. Исключим неизвестное x_1 из уравнений с номерами $i = 2,3, \ldots, n$. Предположим, что $a_{11} \neq 0$. Будем называть его *ведущим элементом 1-го шага*. Разделим 1-е уравнение этой системы на ведущий элемент первого шага. С помощью полученного *приведенного уравнения* исключим неизвестное x_1 из всех остальных уравнений системы (1).

В результате 1-го шага получим эквивалентную системе (1) систему следующего вида:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)} x_n = \beta_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)} x_n = \beta_2^{(1)}, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{n2}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)} x_n = \beta_n^{(1)}, \end{cases}$$

в которой подсистема, состоящая из уравнений, начиная со 2-го, представляет собой систему из $n-1$ уравнения с таким же числом неизвестным.

2-й шаг. Первое уравнение полученной подсистемы $n-1$ порядка делим на коэффициент при x_2 (ведущий элемент второго шага). Будем считать, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Исключим x_2 из остальных $n-2$ уравнений и т. д. Аналогично проводятся остальные шаги.

После $(n-1)$-го шага исключения получим систему уравнений,

$$\begin{cases} 1\cdot x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)} x_n = \beta_1, \\ 0\cdot x_1 + \quad 1\cdot x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)} x_n = \beta_2^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\cdot x_1 + \quad 0\cdot x_2 + \quad 0\cdot x_3 + \ldots + \quad 1\cdot x_n = \beta_n^{(n)}, \end{cases}$$

матрица, которой является правой (верхней) треугольной. В матричной записи это означает, что сначала (прямой ход метода Гаусса) элементарными операциями над строками приводят расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$A_p = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & \beta_1^1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n}^2 & \beta_2^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \beta_n^{(n)} \end{bmatrix}.$$

На этом вычисления прямого хода заканчиваются и начинаются вычисления по определению неизвестных – обратный ход метода Гаусса.

Обратный ход. Из последнего уравнения системы находим x_n. Подставляя его в предпоследнее уравнение, получим x_{n-1} и так далее. Процедуру обратного хода можно свести к применению рекуррентных формул:

$$x_n = \beta_n^{(n)};\ x_i = \beta_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j \quad (i = n-1, n-2, \ldots, 1)\ .$$

С матричной точки зрения данная процедура равносильна тому, что с помощью элементарных преобразований, аналогичных прямому ходу метода Гаусса, ступенчатая матрица преобразуется в матрицу, у которой первые n столбцов представляют собой единичную матрицу:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_n \end{bmatrix}.$$

Последний столбец этой матрицы содержит решение системы (5), которое, в свою очередь, является решением системы (1).

Замечание. Если в ходе преобразований системы один из “ведущих элементов” обращается в нуль, то в соответствующей системе достаточно переставить уравнения так, чтобы сделать “ведущий элемент” отличным от нуля.

В процессе вычислений, чтобы избежать ошибки, необходимо организовать контроль. Простая схема контроля основана на том, что увеличение значений всех неизвестных на единицу равносильно замене системы (1) контрольной системой, в которой свободные члены равны суммам всех коэффициентов соответствующих строк. Решая одновременно исходную и контрольную системы, получаем возможность контролировать попутно каждый шаг расчета.

Поясним сказанное. Рассмотрим матрицу-столбец, состоящую из n строк, элементами которой являются 1.

$$l = (1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1)^T.$$

Тогда $A\cdot\left(x+1\right) = Ax + A\cdot 1 = b + A\cdot 1 = d$. Таким образом, имеем систему с матрицей-столбцом свободных членов $d = b + A\cdot 1,$ элементы которой определяются по формуле

$$d_i = b_i + a_{i1} + \cdots + a_{i1},\ i = \overline{1,n}.$$

Решения полученной контрольной системы отличаются от решения системы (2) на единицу. Поэтому для контроля в прямом ходе необходимо дополнительно вести над элементами d такие же преобразования, как и над b. Обратный ход следует выполнить отдельно для вычисления x из систем: $Bx = c;\quad Bx = d$. Если окажется, что $x_i = x_i + 1\ (i = \overline{1,n}),$ то вычисления выполняются правильно.

Пример. Методом Гаусса в Excel и MathCAD решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_2 - x_3 - 15x_4 = 23,2, \\ 5,5x_1 + 0,5x_2 + 0,75x_3 = -0,9, \\ 5x_1 + 20x_2 - 2x_4 = 26, \\ 3,5x_1 - 20,5x_3 - 2,8x_4 = -48,6. \end{cases}$$

В Excel организовать контроль над вычислениями.

Решение.

1. Рассмотрим схему Гаусса для приведенной выше системы в MS Excel. Порядок заполнения таблицы следующий. Согласно рис. 5 создадим блок ввода расширенной матрицы системы.

	A	B	C	D	E	F
1	**Расширенная матрица системы**					**Столбец контроля**
2	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**b**	**Сумма**
3	**5,5**	**0,5**	**0,75**	**0**	**-0,9**	5,85
4	**0**	**3**	**-1**	**-15**	**23,2**	10,2
5	**5**	**20**	**0**	**-2**	**26**	49
6	**3,5**	**0**	**-20,5**	**-2,8**	**-48,6**	-68,4

Рис. 5.

Заметим, что для получения первого ненулевого разрешающего элемента целесообразно первое и второе уравнения поменять местами. Для организации контроля в ячейках **F3:F6** вычислим суммы соответствующих строк интервала **A** – **E**.

В блоке ячеек **A8:E26** поэтапно реализуем прямой ход метода Гаусса с одновременным контролем за вычислениями в блоке ячеек **F8:H26**. Столбец **F** рассчитывается одновременно с основными расчетами по формулам, аналогичным формулам в блоках прямого хода, а столбец **H** построчным суммированием элементов столбцов **A – E**. При верных вычислениях результаты столбца **F** должны совпасть с результатами столбца **H**. Результаты вычислений показаны на рис. 6.

	A	B	C	D	E	F	G	H
7	**Прямой ход метода Гаусса**							**Сумма**
8	1	0,0909	0,1364	0	-0,1636	1,0636364		1,063636
9	0	3	-1	-15	23,2	10,2		10,2
10	0	19,545	-0,682	-2	26,8182	43,681818		43,68182
11	0	-0,318	-20,98	-2,8	-48,027	-72,12273		-72,12273
12								
13	1	0,0909	0,1364	0	-0,1636	1,0636364		1,063636
14	0	1	-0,333	-5	7,73333	3,4		3,4
15	0	0	5,8333	95,727	-124,33	-22,77273		-22,77273
16	0	0	-21,08	-4,391	-45,567	-71,04091		-71,04091
17								
18	1	0,0909	0,1364	0	-0,1636	1,0636364		1,063636
19	0	1	-0,333	-5	7,73333	3,4		3,4
20	0	0	1	16,41	-21,314	-3,903896		-3,903896
21	0	0	0	341,59	-494,94	-153,3481		-153,3481
22								
23	1	0,0909	0,1364	0	-0,1636	1,0636364		1,063636
24	0	1	-0,333	-5	7,73333	3,4		3,4
25	0	0	1	16,41	-21,314	-3,903896		-3,903896
26	0	0	0	1	-1,4489	-0,448918		-0,448918

Рис. 6.

После приведения расширенной матрицы к ступенчатому виду выполним обратный ход метода Гаусса. Для этого снизу вверх применим рекуррентные формулы. Результаты этих вычислений приведены на рис. 7.

	A	B	C	D	E	F	G	H
27	**Обратный ход метода Гаусса**							
28	0	0	0	1	-1,4489	-0,448918	**x4**	-0,448918
29	0	0	1	0	2,46302	3,4630229	**x3**	3,463023
30	0	1	0	0	1,3098	2,3097511	**x2**	2,309751
31	1	0	0	0	-0,6186	0,3814286	**x1**	0,381429

Рис. 7.

В блоке ячеек **E28:E31** получено решение исходной системы (соответственно x_4, x_3, x_2, x_1). Для контроля значения в ячейках **F28:F31** и **H28:H31** должны совпасть и отличаться от соответствующих значений в ячейках **E28:E31** на единицу.

На рис. 8 показан макет расчетной таблицы метода Гаусса.

B33 fx

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Расширенная матрица системы**					**Столбец контроля**		
2	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**b**	**Сумма**		
3	**5,5**	**0,5**	**0,75**	**0**	**-0,9**	=СУММ(A3:E3)		
4	**0**	**3**	**-1**	**-15**	**23,2**	=СУММ(A4:E4)		
5	**5**	**20**	**0**	**-2**	**26**	=СУММ(A5:E5)		
6	**3,5**	**0**	**-20,5**	**-2,8**	**-48,6**	=СУММ(A6:E6)		
7	**Прямой ход метода Гаусса**							**Сумма**
8	=A3/$A$3	=B3/$A$3	=C3/$A$3	=D3/$A$3	=E3/$A$3	=F3/$A$3		=СУММ(A8:E8)
9	=A4-$A4*A$8	=B4-$A4*B$8	=C4-$A4*C$8	=D4-$A4*D$8	=E4-$A4*E$8	=F4-$A4*F$8		=СУММ(A9:E9)
10	=A5-$A5*A$8	=B5-$A5*B$8	=C5-$A5*C$8	=D5-$A5*D$8	=E5-$A5*E$8	=F5-$A5*F$8		=СУММ(A10:E10)
11	=A6-$A6*A$8	=B6-$A6*B$8	=C6-$A6*C$8	=D6-$A6*D$8	=E6-$A6*E$8	=F6-$A6*F$8		=СУММ(A11:E11)
12								
13	=A8	=B8	=C8	=D8	=E8	=F8		=СУММ(A13:E13)
14	=A9	=B9/$B$9	=C9/$B$9	=D9/$B$9	=E9/$B$9	=F9/$B$9		=СУММ(A14:E14)
15	=A10	=B10-$B10*B$14	=C10-$B10*C$14	=D10-$B10*D$14	=E10-$B10*E$14	=F10-$B10*F$14		=СУММ(A15:E15)
16	=A11	=B11-$B11*B$14	=C11-$B11*C$14	=D11-$B11*D$14	=E11-$B11*E$14	=F11-$B11*F$14		=СУММ(A16:E16)
17								
18	=A13	=B13	=C13	=D13	=E13	=F13		=СУММ(A18:E18)
19	=A14	=B14	=C14	=D14	=E14	=F14		=СУММ(A19:E19)
20	=A15	=B15	=C15/$C$15	=D15/$C$15	=E15/$C$15	=F15/$C$15		=СУММ(A20:E20)
21	=A16-$C16*A$20	=B16-$C16*B$20	=C16-$C16*C$20	=D16-$C16*D$20	=E16-$C16*E$20	=F16-$C16*F$20		=СУММ(A21:E21)
22								
23	=A18	=B18	=C18	=D18	=E18	=F18		=СУММ(A23:E23)
24	=A19	=B19	=C19	=D19	=E19	=F19		=СУММ(A24:E24)
25	=A20	=B20	=C20	=D20	=E20	=F20		=СУММ(A25:E25)
26	=A21	=B21	=C21	=D21/$D$21	=E21/$D$21	=F21/$D$21		=СУММ(A26:E26)
27	**Обратный ход метода Гаусса**							
28	=A26	=B26	=C26	=D26	=E26	=F26	**x4**	=СУММ(A28:E28)
29	=A20-$D$20*A28	=B20-$D$20*B28	=C20-$D$20*C28	=D20-$D$20*D28	=E20-$D$20*E28	=F20-$D$20*F28	**x3**	=СУММ(A29:E29)
30	=A14-$D$14*A28-$C$14*A29	=B14-$D$14*B28-	=C14-$D$14*C28-	=D14-$D$14*D28-$	=E14-$D$14*E28-$C$14*E29	=F14-$D$14*F28-$C$14*F29	**x2**	=СУММ(A30:E30)
31	=A8-$D$8*A28-$C$8*A29-$B$8*A30	=B8-$D$8*B28-$C	=C8-$D$8*C28-$C	=D8-$D$8*D28-C	=E8-$D$8*E28-$C$8*E29-$B$8*E30	=F8-$D$8*F28-$C$8*F29-$B$8*F30	**x1**	=СУММ(A31:E31)

Рис. 8.

2. В MathCAD прямой и обратный ход метода Гаусса выполняет функция **rref()**. Реализация метода Гаусса средствами MathCAD показана на рис. 9.

Матрица системы A

$$A := \begin{pmatrix} 5.5 & 0.5 & 0.75 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -15 \\ 5 & 20 & 0 & -2 \\ 3.5 & 0 & -20.5 & -2.8 \end{pmatrix}$$

Столбец свободных членов b

$$b := \begin{pmatrix} -0.9 \\ 23.2 \\ 26 \\ -48.6 \end{pmatrix}$$

Формирование расширенной матрицы C

$$C := \mathrm{augment}(A, b)$$

Расширенная матрица системы

$$C = \begin{pmatrix} 5.5 & 0.5 & 0.75 & 0 & -0.9 \\ 0 & 3 & -1 & -15 & 23.2 \\ 5 & 20 & 0 & -2 & 26 \\ 3.5 & 0 & -20.5 & -2.8 & -48.6 \end{pmatrix}$$

Прямой и обратный ход метода Гаусса

$$\mathrm{rref}(C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -0.619 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.31 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2.463 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.449 \end{pmatrix}$$

Рис. 9.

В результате применения функции **rref(*C*)** к расширенной матрице системы *C* получаем матрицу, у которой в левой части стоит единичная матрица размерности, соответствующей размерности матрицы *A*, а справа – столбец решения этой системы.

1.4. Метод квадратного корня (метод Холецкого)

Пусть задана система $A \cdot x = b$, где $A \neq 0$ – симметрическая и положительно определенная матрица. В этом случае матрицу A можно разложить в произведение двух треугольных матриц (нижней S и верхней треугольной S^T):

$$A = S \cdot S^{T}. \tag{6}$$

Это позволяет свести решение заданной системы к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами, что является задачей более простой.

Подставим в исходную систему правую часть выражения (6). В результате получим $S \cdot S^{\mathrm{T}} \cdot x = b$. Обозначим $S^{\mathrm{T}} \cdot x = z$. Тогда $S \cdot z = b$ и решение исходной системы сводится к решению двух систем:

$S \cdot z = b$, решая которую находим столбец неизвестных z;

$S^{\mathrm{T}} x = z$, из которой получаем матрицу неизвестных исходной системы x.

Для нахождения матрицы S элементы матрицы $S \cdot S^{\mathrm{T}}$, представляющие собой суммы произведений неизвестных элементов нижнетреугольной матрицы S, приравнивают к соответствующим элементам матрицы A. Элементы матрицы S последовательно вычисляются по следующим формулам:

1) $S_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad d_{11} = \operatorname{sign}\left(a_{11}\right);$

2) $S_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{S_{i1} \cdot d_{11}}, \quad (i = 2,3, \ldots, n);$

3) $d_{ii} = \operatorname{sign}\left(a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} S_{ki}^2 d_{kk}\right), \; S_{ii} = \sqrt{\left|a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} S_{ik}^2 d_{kk}\right|};$

4) $S_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} S_{ik} c_{jk} d_{kk}}{S_{ii} d_{ii}}, \quad i \le j \;;$

5) $S_{ij} = 0, \quad i > j.$

После нахождения элементов матрицы S системы примут вид:

$$\begin{pmatrix} S_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{n1} & S_{n2} & S_{n3} & \ldots & S_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \ldots \\ Z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} & \dots & S_{n1} \\ 0 & S_{22} & S_{32} & \dots & S_{n2} \\ 0 & 0 & S_{33} & \dots & S_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & S_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \dots \\ Z_n \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Последовательно решая первую систему, получим

$$\begin{cases} Z_1 = \dfrac{b_1}{S_{11}}, \\ Z_2 = (b_2 - S_{21} \cdot Z_1) / S_{22}, \\ \qquad \dots \\ Z_n = (b_n - S_{n1} \cdot Z_1 - S_{n2} \cdot Z_2 - \dots - S_{nn} \cdot Z_{n-1}) / S_{nn}. \end{cases} \qquad (9)$$

Аналогично решается система (8).

$$\begin{aligned} & x_n = \frac{Z_n}{S_{nn}}, \\ & x_{n-1} = (Z_{n-1} - S_{nn-1} \cdot x_n) / S_{n-1n-1}, \\ & x_{n-2} = (Z_{n-2} - S_{nn-2} \cdot x_n - S_{n-1n-2} \cdot x_{n-1}) / S_{n-2n-2}, \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ & x_1 = (Z_1 - S_{n1} \cdot x_n - S_{n-11} \cdot x_{n-1} - \dots - S_{21} \cdot x_2) / S_{11}. \end{aligned}$$

Решение СЛАУ по методу квадратного корня удобно сводить к таблице, приведенной ниже (пример решения системы 4-го порядка).

В раздел I таблицы записываем коэффициенты системы и свободные члены. При вычислениях применяем контроль с помощью сумм, учитывая все коэффициенты соответствующей строки.

Коэффициенты шестого столбца контроля $\bar{b}_i$ вычисляем по формуле

$$\bar{b}_i = \sum_{l=1}^{n} a_{i\ell} + b_i .$$

Находим элементы матрицы S последовательно по приведенным выше формулам и результаты заносим в раздел II таблицы. Далее находим Z_i из системы (9). Организуем столбец контроля $\bar{Z}_i$:

$$\bar{Z}_i = Z_i + \sum_{l=1}^{n} S_{il} \ . \qquad (10)$$

Реализация метода Холецкого

	Расширенная матрица					Сумма по строке
	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	b_1	$\bar{b}_1$
I	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	b_2	$\bar{b}_2$
	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	b_3	$\bar{b}_3$
	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	b_4	$\bar{b}_4$
	S_{ij}^* (транспонированная матрица к S_{ij})				Z_i	$\bar{Z}_i$
	S_{11}	S_{21}	S_{31}	S_{41}	Z_1	$\bar{Z}_1$
II		S_{22}	S_{32}	S_{42}	Z_2	$\bar{Z}_2$
			S_{33}	S_{43}	Z_3	$\bar{Z}_3$
				S_{44}	Z_4	$\bar{Z}_4$
	Решение и его проверка					
	x_1	x_2	x_3	x_4		
III	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$		
	$1+\bar{x}_1$	$1+\bar{x}_2$	$1+\bar{x}_3$	$1+\bar{x}_4$		

После этого находим решение исходной системы по формулам

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{z_4}{S_{44}}, \\ x_3 &= (z_3 - S_{43} \cdot x_4) / S_{33}, \\ x_2 &= (z_2 - S_{42} \cdot x_4 - S_{32} \cdot x_3) / S_{22}, \\ x_1 &= (z_1 - S_{41} \cdot x_4 - S_{31} \cdot x_3 - S_{21} \cdot x_2) / S_{11}. \end{aligned} \qquad (11)$$

Аналогично находим $\bar{x}_i$ $(i = \overline{1,4})$ контрольной системы, заменив Z_i на $\bar{Z}_i$ и ссылаясь уже на расчетную строку.

Если все вычисления верны, то значения решения x_i будет отличаться от соответствующего значения $\bar{x}_i$ на единицу, и, значит, две последних строки расчетной таблицы должны совпасть.

Пример. Методом квадратного корня в Excel и MathCAD решить систему уравнений

$$\begin{cases} 1{,}23x_1 + 0{,}42x_2 + 0{,}35x_3 + 1{,}7x_4 = 1{,}3, \\ 0{,}42x_1 + 4{,}45x_2 + 0{,}17x_3 + 2{,}2x_4 = 0{,}15, \\ 0{,}35x_1 + 0{,}17x_2 + 6{,}37x_3 + 0{,}29x_4 = 0{,}72, \\ 1{,}7\ x_1 + 2{,}2x_2 + 0{,}29x_3 + \ 9x_4 = 0{,}9. \end{cases}$$

В Excel организовать контроль над вычислениями.

Решение

1. Рассмотрим решение приведенной выше системы методом квадратного корня в Excel. Результаты вычислений и макет расчетной таблицы показаны соответственно на рис. 10 и 11.

	A	B	C	D	E	F
1	**Расширенная матрица**					**Сумма по строкам**
2	**1,23**	**0,42**	**0,35**	**1,7**	**1,3**	5
3	**0,42**	**4,45**	**0,17**	**2,2**	**0,15**	7,39
4	**0,35**	**0,17**	**6,37**	**0,29**	**0,72**	7,9
5	**1,7**	**2,2**	**0,29**	**9**	**0,9**	14,09
6	Sij				Zi	
7	1,1091	0,3787	0,3156	1,5328	1,1722	4,5083
8	0	2,0752	0,0243	0,7804	-0,1416	2,7383
9	0	0	2,5040	-0,0850	0,1412	2,5602
10	0	0	0	2,4565	-0,3152	2,1413
11	Решение и его проверка					
12	**X4**	**X3**	**X2**	**X1**		
13	**-0,1283**	**0,0520**	**-0,0206**	**1,2265**		
14	0,8717	1,0520	0,9794	2,2265		
15	0,8717	1,0520	0,9794	2,2265		

Рис. 10.

	A	B	C	D	E	F
1			Расширенная матрица			Сумма по строкам
2	**1,23**	**=A3**	**=A4**	**=A5**	**1,3**	=СУММ(A2:E2)
3	**0,42**	**4,45**	**=B4**	**=B5**	**0,15**	=СУММ(A3:E3)
4	**0,35**	**0,17**	**6,37**	**=C5**	**0,72**	=СУММ(A4:E4)
5	**1,7**	**2,2**	**0,29**	**9**	**0,9**	=СУММ(A5:E5)
6			Sij		Zi	
7	=A2^(1/2)	=A3/$A$7	=A4/$A$7	=A5/$A$7	=E2/A7	=СУММ(A7:E7)
8	0	=(B3-B7^2)^(1/2)	=(B4-C7*B7)/$B$8	=(B5-D7*B7)/$B$8	=(E3-B7*$E$7)/B8	=СУММ(A8:E8)
9	0	0	=(C4-C7^2-C8^2)^(1/2)	=(C5-D7*C7-D8*C8)/C9	=(E4-C7*$E$7-C8*E8)/C9	=СУММ(A9:E9)
10	0	0	0	=(D5-D7^2-D8^2-D9^2)^(1/2)	=(E5-D7*$E$7-D8*E8-D9*E9)/D10	=СУММ(A10:E10
11			Решение и его проверка			
12	**X4**	**X3**	**X2**	**X1**		
13	**=E10/D10**	**=(E9-A13*D9)/C9**	**=(E8-D8*A13-C8*B13)/B8**	**=(E7-D7*A13-C7*B13-B7*C13)/A7**		
14	=F10/D10	=(F9-A14*D9)/C9	=(F8-D8*A14-C8*B14)/B8	=(F7-D7*A14-C7*B14-B7*C14)/A7		
15	=A13+1	=B13+1	=C13+1	=D13+1		

Рис. 11.

2. В MathCAD реализация метода квадратного корня показана на рис. 12.

Матрица системы и столбец свободных членов

$$A := \begin{pmatrix} 1.23 & 0.42 & 0.35 & 1.7 \\ 0.42 & 4.45 & 0.17 & 2.2 \\ 0.35 & 0.17 & 6.37 & 0.29 \\ 1.7 & 2.2 & 0.29 & 9 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1.3 \\ 0.15 \\ 0.72 \\ 0.9 \end{pmatrix}$$

Применение метода Холецкого

$$s_{0,0} := \sqrt{\left|A_{0,0}\right|} \qquad s_{0,0} = 1.109 \qquad d_{0,0} := \mathrm{signum}\left(A_{0,0}\right) \qquad d_{0,0} = 1$$

$$j := 1..3 \qquad s_{0,j} := \frac{A_{0,j}}{s_{0,0} \cdot d_{0,0}} \qquad s_{1,1} := \sqrt{\left|A_{1,1} - \left(s_{0,1}\right)^2 \cdot d_{0,0}\right|} \qquad d_{1,1} := \mathrm{signum}\left[A_{1,1} - \left(s_{1,2}\right)^2 \cdot d_{0,0}\right]$$

$$j := 2..3 \qquad s_{1,j} := \frac{A_{1,j} - s_{0,j} \cdot s_{0,1}}{s_{1,1}}$$

$$s_{2,2} := \sqrt{\left|A_{2,2} - \left(s_{0,2}\right)^2 \cdot d_{0,0} - \left(s_{1,2}\right)^2 \cdot d_{1,1}\right|} \qquad s_{2,3} := \frac{\left(A_{2,3} - s_{0,3} \cdot s_{0,2} - s_{1,3} \cdot s_{1,2}\right)}{s_{2,2}}$$

$$d_{2,2} := \mathrm{signum}\left[A_{2,2} - \left(s_{0,2}\right)^2 \cdot d_{0,0} - \left(s_{1,2}\right)^2 \cdot d_{1,1}\right]$$

$$s_{3,3} := \sqrt{\left|A_{3,3} - \left(s_{0,3}\right)^2 \cdot d_{0,0} - \left(s_{1,3}\right)^2 \cdot d_{1,1} - \left(s_{2,3}\right)^2 \cdot d_{2,2}\right|} \qquad s_{2,3} = -0.085$$

$$s = \begin{pmatrix} 1.109 & 0.379 & 0.316 & 1.533 \\ 0 & 2.075 & 0.024 & 0.78 \\ 0 & 0 & 2.504 & -0.085 \\ 0 & 0 & 0 & 2.456 \end{pmatrix} \qquad s^T \cdot s = \begin{pmatrix} 1.23 & 0.42 & 0.35 & 1.7 \\ 0.42 & 4.45 & 0.17 & 2.2 \\ 0.35 & 0.17 & 6.37 & 0.29 \\ 1.7 & 2.2 & 0.29 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{–проверка результата}$$

$$Z := \left(s^T\right)^{-1} \cdot B \qquad Z = \begin{pmatrix} 1.1722 \\ -0.1416 \\ 0.1412 \\ -0.3152 \end{pmatrix} \qquad x := s^{-1} \cdot Z \qquad x = \begin{pmatrix} 1.226 \\ -0.021 \\ 0.052 \\ -0.128 \end{pmatrix} \quad \text{Решение системы}$$

Рис. 12.

1.5. Метод прогонки

Часто возникает необходимость в решении линейных алгебраических систем, матрицы которых являются слабо заполненными, т. е. содержат ненулевые элементы, размещенные в определенном порядке. Среди таких систем выделим системы с матрицами ленточной структуры, в которых ненулевые элементы располагаются на главной и нескольких побочных диагоналях. Для решения систем с ленточными матрицами коэффициентов метод Гаусса можно трансформировать в более эффективные методы.

Рассмотрим наиболее простой случай систем, к которым, как увидим впоследствии в курсе "Методов численного анализа", сводится решение задач сплайн-интерполяции функций, дискретизации краевых задач для дифференциальных уравнений методами конечных разностей и др. А именно, будем искать решение такой системы, каждое уравнение которой связывает три "соседних" неизвестных:

$$b_i x_{i-1} + c_i x_i + d_i x_i = r_i, \tag{12}$$

где i=1, 2, ..., n; b_1= 0, d_n= 0.

Данная система имеет трехдиагональную структуру, что хорошо видно из эквивалентного векторно-матричного представления:

$$\begin{bmatrix} c_1 & d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & c_2 & d_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & c_{n-1} & d_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_n & c_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \dots \\ r_{n-1} \\ r_n \end{bmatrix}.$$

Как и в решении СЛАУ методом Гаусса, цель – избавится от ненулевых элементов в поддиаганальной части матрицы системы. Предположим, что существуют такие наборы чисел δ_i и λ_i (i = 1, 2, ..., n), при которых

$$x_i = \delta_i x_{i+1} + \lambda_i. \tag{13}$$

Уменьшив в выражении (13) индекс на единицу и подставив полученное выражение $x_{i-1} = \delta_{i-1} x_i + \lambda_{i-1}$ в систему (12), придем к эквивалентной системе:

$$b_i \delta_{i-1} x_i + b_i \lambda_{i-1} + c_i x_i + d_i x_{i+1} = r_i. \tag{14}$$

Откуда

$$x_i = -((d_i / (c_i + b_i\,\delta_{i-1}))\,x_{i-1} + (r_i - b_i\,\lambda_{i-1}) / (c_i + b_i\,\delta_{i-1})). \qquad (15)$$

Таким образом, представление (13) будет иметь место, если при всех $i = 1, 2, \ldots, n$ выполняются рекуррентные соотношения

$$\delta_i = -d_i / (c_i + b_i\,\delta_{i-1}), \quad \lambda_i = (r_i - b_i\,\lambda_{i-1}) / (c_i + b_i\,\delta_{i-1}). \qquad (16)$$

Учитывая, что b_1=0, процесс вычисления δ_i, λ_i может быть начат со значений

$$\delta_1 = -d_1 / c_1, \ \ \lambda_1 = r_1 / c_1 \qquad (17)$$

и продолжен далее по формулам (12) последовательно при i = = 2, 3, ..., n, причем при $i = n$, в силу $d_n = 0$, получим δ_n=0. Следовательно, полагая в системе (13) $i = n$, будем иметь

$$x_n = \lambda_n = (r_n - b_n\,\lambda_{n-1}) / (c_n + b_n\,\delta_{n-1}). \qquad (18)$$

Далее по формулам (12) последовательно находятся x_{n-1}, x_{n-2}, …, x_1 при $i = n-1$, $n-2$, ..., 1 соответственно.

Такой метод решения системы называется **методом прогонки** и сводится к вычислениям по следующей схеме: нахождение прогоночных коэффициентов δ_i , λ_i по формулам (16, 17, 18) при $i = 1, 2, \ldots, n$ (прямая прогонка) и затем неизвестных x_i по формуле (13) при $i = n - 1, n - 2, \ldots, 1$ (обратная прогонка).

Для успешного применения метода прогонки нужно, чтобы в процессе вычислений не возникало ситуаций с делением на нуль, а при больших размерностях систем не должно быть строгого роста погрешностей округлений.

Будем называть прогонку корректной, если знаменатели прогоночных коэффициентов (16) не обращаются в нуль, и устойчивой, если $|\delta_i| < 1$ при i=1, 2, …, n.

Приведем достаточные условия корректности и устойчивости метода прогонки, которые во многих приложениях метода автоматически выполняются.

Теорема. Пусть коэффициенты b_i и d_i уравнения (14) при $i = 2, 3, \ldots, n - 1$ отличны от нуля и удовлетворяют неравенствам

$$|c_i| > |b_i| + |d_i|, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (19)$$

Тогда прогонка по формулам (16), (17), (18) корректна и устойчива (т. е. $c_i + b_i\,\delta_{i-1} \neq 0$, $|\delta_i| < 1$).

При этом правильность расчетов можно проверить на основании следующего тождества

$$|A| = c_1 \cdot \prod_{k=2}^{n} \Delta_k \,, \qquad (20)$$

где $\Delta_i = c_i + b_i\delta_{i-1}$ ($i = 2, 3, \ldots, n$).

Пример. Решить систему методом прогонки в Excel и MathCAD

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -5, \\ x_1 + 10x_2 - 5x_3 = -18, \\ x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -40, \\ x_3 + 4x_4 = -27. \end{cases}$$

Правильность промежуточных расчетов в MathCAD проверить на основании тождества (20).

Решение.

1. Макет расчетной таблицы в Excel и результаты вычислений показаны соответственно на рис. 13 и 14.

	A	B	C	D
1	Исходные данные			
2	b	c	d	r
3	0	2	1	-5
4	1	10	-5	-18
5	1	-5	2	-40
6	1	4	0	-27
7	Применение метода прогонки			
8	дельта	лямбда	решение	
9	=-C3/B3	=D3/B3	x1=	=A9*D10+B9
10	=-C4/(B4+A4*A9)	=(D4-A4*B9)/(B4+A4*A9)	x2=	=A10*D11+B10
11	=-C5/(B5+A5*A10)	=(D5-A5*B10)/(B5+A5*A10)	x3=	=A11*D12+B11
12	=-C6/(B6+A6*A11)	=(D6-A6*B11)/(B6+A6*A11)	x4=	=B12

Рис. 13.

	A	B	C	D
1	Исходные данные			
2	b	c	d	r
3	0	2	1	-5
4	1	10	-5	-18
5	1	-5	2	-40
6	1	4	0	-27
7	Применение метода прогонки			
8	дельта	лямбда	решение	
9	-0,50	-2,50	x1=	-3
10	0,53	-1,63	x2=	1
11	0,45	8,58	x3=	5
12	0,00	-8,00	x4=	-8

Рис. 14.

2. В MathCAD реализация метода прогонки показана на рис. 15.

Матрица системы

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c := \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad d := \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad r := \begin{pmatrix} -5 \\ -18 \\ -40 \\ -27 \end{pmatrix}$$

Реализация метода прогонки

$$i := 1..3 \qquad \delta_0 := \frac{-d_0}{c_0} \qquad \lambda_0 := \frac{r_0}{c_0}$$

$$\delta_i := \frac{-d_i}{c_i + b_i \cdot \delta_{i-1}} \qquad \lambda_i := \frac{r_i - b_i \cdot \lambda_{i-1}}{c_i + b_i \cdot \delta_{i-1}} \qquad \delta = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.526 \\ 0.447 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda = \begin{pmatrix} -2.5 \\ -1.632 \\ 8.576 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Проверка расчётов

$$\Delta_i := c_i + b_i \cdot \delta_{i-1} \qquad |A| = -378 \qquad c_0 \cdot \prod_{k=1}^{3} \Delta_k = -378$$

$$j := 2..0 \qquad x_3 := \lambda_3 \qquad x_j := \delta_j \cdot x_{j+1} + \lambda_j \qquad x = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$ - решение системы

Рис. 15.

1.6. Особенность итерационных методов решения СЛАУ

Существует большое количество итерационных методов, основанных на различных принципах. Вычислительные схемы этих методов обладают свойством самоисправляемости. Если при использовании точных методов отдельный сбой в вычислениях ведет к ошибке в окончательном результате, то в случае сходящегося итерационного процесса такой сбой приводит лишь к увеличению итерационных шагов. Ошибка, допущенная в каком-либо приближении, будет исправлена последующими приближениями. Однако, каждый итерационный процесс имеет свою ограниченную область применимости, так как, во-первых, он может оказаться расходящимся для данной системы, и, во-вторых, сходимость процесса может быть весьма медленной.

К простейшим итерационным методам относятся: метод простой итерации, метод Якоби, метод Зейделя.

Условия и скорость каждого итерационного процесса существенно зависят от свойств матрицы системы и выбора начального приближения.

Пусть дана СЛАУ порядка n:

$$A \cdot x = f, \quad det\, A \neq 0. \tag{21}$$

При использовании итерационных методов решения систему (21) приводят к каноническому виду:

$$x = B \cdot x + b \ . \tag{22}$$

Далее выбирается некоторое начальное приближение к решению системы уравнений $x^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ и вычисляется последовательность $x^{(k)}$ приближений к корню (k – номер итерации) по рекуррентным формулам:

$$x^{(k+1)} = B \cdot x^{(k)} + b, \ k = 0,1,2,\dots . \tag{23}$$

Систему (21) можно привести к каноническому виду (22) различными способами.

Например, с помощью любой неособенной матрицы **C** такое преобразование может быть проведено следующим образом:

$$x = x + C \cdot (f - Ax),$$

$$x = x + C \cdot f - C \cdot A \cdot x,$$

$$x = (E - C \cdot A) \cdot x + C \cdot f,$$

$$x = B \cdot x + b,$$

где $B = E - C \cdot A,\ b = C \cdot f$.

Другой способ приведения системы к каноническому виду (22) заключается в следующем: представим матрицу A как сумму двух матриц P и Q, $A = P + Q$, где $\det P \neq 0$, причем P^{-1} находится сравнительно просто. Тогда

$$(P+Q)\cdot x = f,\ P\cdot x + Q\cdot x = f,\ P\cdot x = -Q\cdot x + f,\ x = -P^{-1}\cdot Q\cdot x + P^{-1}\cdot f.$$

Положим $-P^{-1}\cdot Q = B;\quad P^{-1}\cdot f = b$. Получим $x = B\cdot x + b$. Последовательность приближений $x^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ к решению x системы (21) строится по формуле (23).

Начальное приближение $x^{(0)}$ обычно выбирается произвольно. Удобнее всего в качестве начального приближения $x^{(0)}$ брать матрицу-столбец b, т. е.

$$x^{(0)} = b. \tag{24}$$

Для практических вычислений важными являются вопросы сходимости итерационного процесса и оценки погрешности решения.

Теорема. Итерационный процесс (23) для приведенной линейной системы сходится к единственному ее решению, если какая-нибудь каноническая норма матрицы В меньше единицы, т. е.

$$\|B\| < 1 . \tag{25}$$

К каноническим нормам относятся:

$$\|B\|_m = \max_i \sum_j \left| B_{ij} \right| \ (m\text{-норма}); \tag{26}$$

$$\|B\|_\ell = \max_j \sum_i \left| B_{ij} \right| \ (l\text{-норма }); \tag{27}$$

$$\|B\|_k = \sqrt{\sum_{i,j} \left| B_{ij} \right|^2} \ (k\text{-норма или Евклидова норма}). \tag{28}$$

Пример. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Имеем:

$\|A\|_m$ = max(1+ 2 + 3, 4 + 5 + 6, 7 + 8 + 9) = max(6, 15, 24) = 24;

$\|A\|_\ell$ = max(1+ 4 + 7, 2 + 5 + 8, 3 + 6 + 9) = max(12, 15, 18) = 18;

$$\|A\|_k = \sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2} = \sqrt{285} \approx 16{,}9 \ .$$

В MathCAD существуют специальные функции для вычисления норм матриц:

normi(*A*) – возвращает *m*-норму матрицы *A*;
norm1(*A*) – возвращает *l*-норму матрицы *A*;
norme(*A*) – возвращает Евклидову норму матрицы *A*.

Если процесс сходящийся, например, при $\|B\| < 1$, то для погрешности метода простой итерации (наиболее грубого метода) справедлива оценка

$$\left\|x - x^{(k)}\right\| \le \frac{1}{1-\|B\|}\|B\|^{k+1} \cdot \|B\| < \varepsilon. \tag{29}$$

Используя неравенство (23), получим ограничение снизу для числа итераций, необходимых для достижения решения с заданной точностью ε:

$$k(\varepsilon) \ge \ln\left[\frac{(1-\|B\|)\cdot\varepsilon}{\|B\|}\right] / \ln\|B\| - 1\,. \tag{30}$$

В зависимости от применяемого итерационного метода используют различные критерии окончания итераций. При применении метода простой итерации таким критерием служит

$$\frac{\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|}{\left\|x^{(k+1)}\right\|} \le \varepsilon. \tag{31}$$

Для всех остальных перечисленных выше методов, имеющих заведомо большую точность, применяют более простой критерий

$$\max_{1\le i\le n}\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| < \varepsilon\,, \tag{32}$$

где ε – заданная погрешность приближенного решения.

1.7. Метод простой итерации

Пусть дана линейная система (21). Предполагая, что диагональные элементы матрицы *A* не равны 0, т.е. $a_{ij} \ne 0$, (i = 1, 2, …, n), разрешим первое уравнение системы относительно x_1, второе – относительно x_2 и т. д. Получим эквивалентную систему:

$$\begin{cases} x_1 = b_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}x_3 + \ldots + \beta_{1n}x_n, \\ x_2 = b_2 + \beta_{21}x_1 + \beta_{23}x_2 + \ldots + \beta_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = b_n + \beta_{n1}x_1 + \beta_{n2}x_2 + \ldots + \beta_{n,n-1}x_{n-1}, \end{cases} \qquad (33)$$

где $b_i = \dfrac{f_i}{a_{ii}}$; $\beta_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$ при $i \neq j$;

$\beta_{ij} = 0$ при $i = j$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$).

Вводя матрицы

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nn} \end{bmatrix} \text{ и } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix},$$

систему (33) можно записать в матричной форме $x = b + B \cdot x$, а любое $(k + 1)$ приближение в развернутом виде будет выглядеть:

$$\begin{cases} x_i^{(0)} = b_i, \\ x_i^{(k+1)} = b_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_{i\,j} x_i^{(k)}, \\ \left(\beta_{i\,i} = 0;\ i = 1, \ \ldots, \ n;\ k = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots\right). \end{cases} \qquad (34)$$

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} 100x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 200, \\ 6x_1 + 200x_2 - 10x_3 = 600, \\ x_1 - 2x_2 - 100x_3 = 500 \end{cases}$$

методом простых итераций в MS Excel и MathCAD, сделав четыре итерационных шага. В MathCAD оценить сходимость применяемого метода и погрешность найденного решения.

Решение. Приведем эту систему к каноническому виду

$$
\begin{cases}
x_1 = 2 - 0,06x_2 + 0,02x_3, \\
x_2 = 3 - 0,03x_1 + 0,05x_3, \\
x_3 = 5 - 0,01x_1 - 0,02x_2.
\end{cases}
$$

В матричной форме ее можно записать так:

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.
$$

1. На рис. 16 и 17 приведены макет расчетной таблицы и результаты реализации метода простой итерации при решения приведенной выше системы.

	A	B	C	D	E	F
1	**Матрица B**			**b**		
2	**x1**	**x2**	**x3**			
3	0	-0,06	0,02	2		
4	-0,03	0	0,05	3		
5	-0,01	-0,02	0	5		
6						
7	**Применение метода простой итерации**					
8	**k**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
9	**x1**	=D3	=$B9+$A3*B$9+$B3*B$10+$C3*B$11	=$B9+$A3*	=$B9+$A3*	=$B9+$A3*E$9+$B3*E$10+$C3*E$11
10	**x2**	=D4	=$B10+$A4*B$9+$B4*B$10+$C4*B$11	=$B10+$A4*	=$B10+$A4	=$B10+$A4*E$9+$B4*E$10+$C4*E$11
11	**x3**	=D5	=$B11+$A5*B$9+$B5*B$10+$C5*B$11	=$B11+$A5*	=$B11+$A5	=$B11+$A5*E$9+$B5*E$10+$C5*E$11
12						

Рис. 16

	A	B	C	D	E	F
1	**Матрица B**			**b**		
2	**x1**	**x2**	**x3**			
3	0	-0,06	0,02	2		
4	-0,03	0	0,05	3		
5	-0,01	-0,02	0	5		
6						
7	**Применение метода простой итерации**					
8	**k**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
9	**x1**	2	1,9200	1,9070	1,9070	1,9070
10	**x2**	3	3,1900	3,1884	3,1886	3,1886
11	**x3**	5	4,9200	4,9170	4,9172	4,9172

Рис. 17.

2. Реализация метода в MathCAD показана на рис. 18.

Таким образом, в качестве приближенного решения данной системы можно взять: x_1=1,907, x_2=3,189, x_3=4,917. При этом погрешность вычисления составит $8,612 \cdot 10^{-8}$.

1.8. Метод Якоби

Метод Якоби является некоторой модификацией метода простой итерации. Он позволяет за счет целенаправленного выбора линейных преобразований в системе (21) прийти к эквивалентной системе с матрицей, имеющей диагональное преобладание по строкам. Тем самым заведомо обеспечивается условие сходимости итерационного процесса.

Матрица *A* имеет диагональное преобладание по строкам, если выполняется условие

Матрица системы, приведенной к каноническому виду

$$B := \begin{pmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & -0.02 & 0 \end{pmatrix}$$

Столбец b

$$b := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Проверка достаточного условия сходимости метода (достаточно вычисления одной функции)

$\mathrm{norm1}(B) = 0.08$ $\qquad$ $\mathrm{norme}(B) = 0.089$ $\qquad$ $\mathrm{normi}(B) = 0.08$

Т.к. норма матрицы B меньше 1, то итерационный процесс сходится

Реализация метода простой итерации

$x^{\langle 0 \rangle} := b$ $\quad$ –определение начального приближения

$i := 0..4$ $\quad$ -задание количества итераций

$x^{\langle i+1 \rangle} := b + B \cdot x^{\langle i \rangle}$ $\quad$ -итерационный процесс

$$x = \begin{pmatrix} 2 & 1.92 & 1.907 & 1.907 & 1.907 & 1.907 \\ 3 & 3.19 & 3.188 & 3.189 & 3.189 & 3.189 \\ 5 & 4.92 & 4.917 & 4.917 & 4.917 & 4.917 \end{pmatrix}$$

-матрица приближённых решений

$$\varepsilon := \frac{\left| x^{\langle 5 \rangle} - x^{\langle 4 \rangle} \right|}{\left| x^{\langle 4 \rangle} \right|} \qquad \varepsilon = 8.612 \times 10^{-8}$$

–погрешность

В качестве нормы при вычислении погрешности использовали Евклидову норму.

Рис. 18.

$$\sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij} \right| < \left| a_{ii} \right|, \; i = \overline{1,n}. \qquad (35)$$

Далее повторяются все действия предыдущего параграфа. Поясним это на примере.

Пример. Решить систему методом Якоби

$$\begin{cases} 3,1x_1 + 2,8x_2 + 1,7\,x_3 = 0,2, \\ 1,9x_1 + 3,1x_2 + 2,1x_3 = 2,1, \\ 7,5x_1 + 3,8x_2 + 4,8x_3 = 5,6. \end{cases}$$

Решение. Добьемся диагонального преобладания в системе. Для этого умножим первое уравнение на α, второе на β, третье на γ, и сложим их. При этом получим выражение

$$(3,1\alpha + 1,9\beta + 7,5\gamma)x_1 + (2,8\alpha + 3,1\beta + 3,8\gamma)x_2 + (1,9\alpha + 2,1\beta + 4,8\gamma)x_3 =$$
$$= 0,2\alpha + 2,1\beta + 5,6\gamma.$$

Параметры α, β, γ выберем так, чтобы последовательно доминировали коэффициенты при x_1, x_2, x_3. Данная задача не однозначная. Одним из ее решений является:

– для первого уравнения $\alpha = 2, \beta = -1, \gamma = 0$;

$$4,3x_1 + 2,5x_2 + 1,7x_3 = -1,7\,;$$

– для второго уравнения $\alpha = -1;\ \beta = 2;\ \gamma = 0$;

$$0,7x_1 + 3,4x_2 + 2,3x_3 = 4\,;$$

– для третьего уравнения $\alpha = -3;\ \beta = 1,8;\ \gamma = 1$;

$$1,62x_1 + 0,98x_2 + 2,88x_3 = 8,78.$$

Таким образом, система преобразована к эквивалентной системе

$$\begin{cases} 4,3x_1 + 2,5x_1 + 1,7x_3 = -1,7, \\ 0,7x_1 + 3,4x_2 + 2,3x_3 = 4, \\ 1,62x_1 + 0,98x_2 + 2,88x_3 = 8,78, \end{cases}$$

в которой матрица имеет диагональное преобладание по строкам. Приведем полученную систему к виду (21), разделив каждое из уравнений на диагональные элементы. Далее из 1-го уравнения выразим x_1; из 2-го – x_2; из 3-го – x_3.

$$\begin{cases} x_1 = -0,581x_2 - 0,395x_3 - 0,395, \\ x_2 = -0,206x_1 - 0,676x_3 + 1,176, \\ x_3 = -0,563x_1 - 0,340x_2 + 3,049. \end{cases}$$

В качестве начального приближения выбираем

$$x^{(0)} = (-1,7;\ 4;\ 8,78).$$

Последнюю систему решаем методом простой итерации.

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = -0,581x_2^k - 0,395x_3^k - 0,395, \\ x_2^{k+1} = -0,206x_1^k - 0,676x_3^k + 1,176, \\ x_3^{k+1} = -0,563x_1^k - 0,340x_2^k + 3,049. \end{cases}$$

1.9. Метод Зейделя

Данный метод можно рассматривать как еще одну модификацию метода простой итерации. Метод простой итерации лишен возможности использовать при нахождении последующих координат вектора x^{k+1} уже найденные координаты этого вектора. Это и позволяет сделать метода Зейделя.

Алгоритм метода Зейделя для системы (21) имеет следующую покоординатную форму:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \beta_{11}x_1^k + \beta_{12}x_2^k + \beta_{13}x_3^k + \cdots + \beta_{1n}x_n^k + b_1, \\ x_2^{k+1} = \beta_{21}x_1^{k+1} + \beta_{22}x_2^k + \beta_{23}x_3^k + \cdots + \beta_{2n}x_n^k + b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^{k+1} = \beta_{n1}x_1^{k+1} + \beta_{n2}x_2^{k+1} + \beta_{n3}x_3^{k+1} + \cdots + \beta_{nn}x_n^k + b_n. \end{cases} \quad . \qquad (36)$$

Пример. Методом Зейделя решить систему уравнений

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14. \end{cases}$$

Решение. Приведем эту систему к виду, удобному для итерации:

$$\begin{cases} x_1 = 1,2 - 0,1x_2 - 0,1x_3, \\ x_2 = 1,3 - 0,2x_1 - 0,1x_3, \\ x_3 = 1,4 - 0,2x_1 - 0,2x_2. \end{cases}$$

В качестве нулевых приближений корней возьмем $x_1^{(0)} = 1,2;\ x_2^{(0)} = 1,3;\ x_3^{(0)} = 1,4.$

Применяя метод Зейделя, последовательно получим:

1. Макет расчетной таблицы и результаты вычислений с точностью до четырех знаков в Excel приведены на рис. 19, 20.

Точные значения корней составляют: $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Матрица B			b			
2	x1	x2	x3				
3	0	-0,1	-0,1	1,2			
4	-0,2	0	-0,1	1,3			
5	-0,2	-0,2	0	1,4			
6							
7	Применение метода Зейделя						
8	k	0	1	2	3	4	5
9	x1	=D3	=$D3+$A3*B$9+$B3*B$10+$C3*B$11	=$B9+	=$B9+$	=$B9+$	=$B9+$A3*F$9+$B3*F$10+$C3*F$11
10	x2	=D4	=$D4+$A4*C$9+$B4*B$10+$C4*B$11	=$D4+	=$D4+$	=$D4+$	=$D4+$A4*G$9+$B4*F$10+$C4*F$11
11	x3	=D5	=$D5+$A5*C$9+$B5*C$10+$C5*B$11	=$D5+	=$D5+$	=$D5+$	=$D5+$A5*G$9+$B5*G$10+$C5*F$11
12							

Рис. 19.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Матрица B			b			
2	x1	x2	x3				
3	0	-0,1	-0,1	1,2			
4	-0,2	0	-0,1	1,3			
5	-0,2	-0,2	0	1,4			
6							
7	Применение метода Зейделя						
8	k	0	1	2	3	4	5
9	x1	1,2	0,9300	1,0007	1,0002	1,0000	1,0000
10	x2	1,3	0,9740	0,9979	0,9999	1,0000	1,0000
11	x3	1,4	1,0192	1,0003	1,0000	1,0000	1,0000

Рис. 20.

2. Решение задачи в MathCAD приведено на рис. 21.

Матрица системы, приведенной к каноническому виду

Столбец b

$$B := \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.2 & 0 & -0.1 \\ -0.2 & -0.2 & 0 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.3 \\ 1.4 \end{pmatrix}$$

$k := 5$

$$\mathrm{zeidel}(B,x,b,k) := \left| \begin{array}{l} X^{\langle 0 \rangle} \leftarrow b \\ \text{for } j \in 1..k \\ \quad \text{for } i \in 0..\mathrm{rows}(B)-1 \\ \quad\quad \left| \begin{array}{l} x_i \leftarrow \left(B^T\right)^{\langle i \rangle} \cdot x + b_i \\ X^{\langle j \rangle} \leftarrow x \end{array} \right. \\ X \end{array} \right.$$

- реализация метода Зейделя

Вывод результатов итераций

$$\mathrm{zeidel}(B,b,b,k) = \begin{pmatrix} 1.2 & 0.93 & 1.0007 & 1.0002 & 1 & 1 \\ 1.3 & 0.974 & 0.9979 & 0.9999 & 1 & 1 \\ 1.4 & 1.0192 & 1.0003 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad X := \mathrm{zeidel}(B,b,b,k)$$

Оценка порешности результата

$$\varepsilon := \frac{\left| X^{\langle k \rangle} - X^{\langle k-1 \rangle} \right|}{\left| X^{\langle k \rangle} \right|} \qquad \varepsilon = 5.012 \times 10^{-6}$$

Рис. 21.

1.10. Метод Ньютона решения систем нелинейных уравнений

В отличие от систем линейных уравнений для систем нелинейных уравнений не известны прямые методы решения. Лишь в отдельных случаях систему можно решить непосредственно. Поэтому итерационные методы для нелинейных систем приобретают особую важность.

Рассмотрим нелинейную систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) = 0, \\ f_2(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) = 0, \\ \dots\quad \dots\quad \dots\quad \dots \\ f_n(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) = 0, \end{cases} \tag{37}$$

или в векторной форме $f(x) = 0$, где $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$.

Для решения системы (37) будем пользоваться методом последовательных приближений. Предположим, что известно k-е приближение

$$x^{(k)} = \left(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ \dots,\ x_n^{(k)}\right)$$

одного из изолированных корней $x = \left(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n\right)$ векторного уравнения. Тогда точный корень уравнения можно представить в виде

$$x = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}, \tag{38}$$

где $\Delta x^{(k)} = \left(\Delta x_1^{(k)},\ \Delta x_2^{(k)},\ \dots,\ \Delta x_n^{(k)}\right)$ – погрешность решения.

Подставляя выражение (38) в формулу (37), будем иметь

$$f(x^{(k)} + \Delta x^{(k)}) = 0. \tag{39}$$

Предполагая, что функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема в некоторой выпуклой области, содержащей точки x и $x^{(k)}$, разложим левую часть уравнения (39) по степеням вектора $\Delta x^{(k)}$, ограничиваясь линейными членами

$$f(x^{(k)} + \Delta x^{(k)}) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)}) \cdot \Delta x^{(k)} = 0. \tag{40}$$

Под производной $f'(x)$ понимается матрица Якоби системы функций $f_1, f_2, ..., f_n$ относительно переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, т. е.

$$f'(x) = W(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

или в краткой записи

$$f'(x) = W(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right] \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Поэтому формула (40) может быть записана в следующем виде:

$$f(x^{(k)}) + W(x^{(k)})\,\Delta x^{(k)} = 0.$$

Если $\det W(x) = \det\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right] \neq 0$, то $\Delta x^{(k)} = -\,W^{-1}(x^{(k)}) \cdot f(x^{(k)})$.

Отсюда видно, что метод Ньютона решения системы (37) состоит в построении итерационной последовательности:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - W^{-1}(x^{(k)})\, f(x^{(k)}), \ (k = 0, 1, 2, \dots). \qquad (41)$$

Итерационный процесс метода Ньютона продолжается до тех пор, пока погрешности решений $\Delta x^{(k)}$ не окажутся достаточно малыми или пока не станет ясно, что решение получить не удастся. При этом для нахождения последующих приближений используются найденные значения.

Пример. Методом Ньютона в MathCAD найти положительное решение системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \\ f_2(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 4z, \\ f_3(x, y, z) = 3x^2 - 4y + z^2. \end{cases}$$

исходя из начального приближения $x_0 = y_0 = z_0 = 0,5$, сделав три итерационных шага.

Решение. Полагая, что

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \qquad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{bmatrix}.$$

имеем:

$$f(x) = \begin{bmatrix} x^2+y^2+z^2-1 \\ 2x^2+y^2-4z \\ 3x^2-4y+z^2 \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$f(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0,25+0,25+0,25-1 \\ 0,50+0,25-2,00 \\ 0,75-2,00+0,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,25 \\ -1,25 \\ -1,00 \end{bmatrix}.$$

Составим матрицу Якоби

$$W(x)= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 4x & 2y & -4 \\ 6x & -4 & 2z \end{bmatrix}.$$

Имеем $W(x^{(0)})= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$, причем $\Delta = \det W(x^{(0)}) = -40$.

Следовательно, матрица $W(x^{(0)})$ – неособенная. Составим обратную ей матрицу

$$W^{-1}(x^{(0)}) = -\frac{1}{40}\begin{bmatrix} -15 & -5 & -5 \\ -14 & -2 & 6 \\ -11 & 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{3}{20} \\ \frac{11}{40} & -\frac{7}{40} & \frac{1}{40} \end{bmatrix}.$$

По формуле (41) получаем первое приближение

$$x^{(1)} = x^{(0)} - W^{-1}(x^{(0)})\cdot f(x^{(0)}) =$$

$$=\begin{bmatrix}0,5\\0,5\\0,5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8}\\ \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{3}{20}\\ \frac{11}{40} & -\frac{7}{40} & \frac{1}{40}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-0,25\\-1,25\\-1,00\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,5\\0,5\\0,5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0,375\\0\\-0,125\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,875\\0,500\\0,375\end{bmatrix}.$$

Аналогично находятся последующие приближения. Решение задачи в MathCAD показано на рис. 22.

$$W(x) := \begin{pmatrix} 2\cdot x_0 & 2\cdot x_1 & 2\cdot x_2 \\ 4\cdot x_0 & 2\cdot x_1 & -4 \\ 6\cdot x_0 & -4 & 2\cdot x_2 \end{pmatrix}$$ -задание вектор-функции, определяющей матрицу Якоби

$$F(x) := \begin{bmatrix} (x_0)^2 + (x_1)^2 + (x_2)^2 - 1 \\ 2(x_0)^2 + (x_1)^2 - 4x_2 \\ 3\cdot(x_0)^2 - 4\cdot x_1 + (x_2)^2 \end{bmatrix}$$ -задание вектор-функции, определяющей систему

$$X^{\langle 0\rangle} := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$ -определение начального приближения

$$\mathrm{Nuton}(W,F,X,k) := \left| \begin{array}{l} x \leftarrow X^{\langle 0\rangle} \\ \text{for } i \in 1..k \\ \quad \left| \begin{array}{l} X^{\langle i\rangle} \leftarrow X^{\langle i-1\rangle} - W(x)^{-1}\cdot F(x) \\ x \leftarrow X^{\langle i\rangle} \end{array}\right. \\ X \end{array}\right.$$ -реализация метода Ньютона

$$\mathrm{Nuton}(W,F,X,3) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.875 & 0.79 & 0.785 \\ 0.5 & 0.5 & 0.497 & 0.497 \\ 0.5 & 0.375 & 0.37 & 0.37 \end{pmatrix}$$ -результаты итераций

$$\mathrm{Nuton}(W,F,X,3)^{\langle 3\rangle} = \begin{pmatrix} 0.785 \\ 0.497 \\ 0.37 \end{pmatrix}$$ -решение системы

Рис. 22.

Останавливаясь на приближении $x^{(3)}$, будем иметь в качестве решения: $x = 0,785$; $y = 0,497$; $z = 0,37$.

1.11. Решение систем уравнений средствами Excel и MathCAD

Решение систем средствами Excel. Широкий класс экономических и инженерных задач составляют задачи оптимизации. Эти задачи предполагают поиск значений аргументов, приводящих целевую функцию к минимальному или максимальному значению при условии соблюдения ряда дополнительных ограничений. MS Excel располагает мощным средством для решения оптимизационных задач. Это уже известный нам инструмент надстройки “**Поиск решения**”.

Задачу решения системы можно свести к оптимизационной задаче. Для этого одно из уравнений можно взять в качестве целевой функции, а оставшиеся рассматривать в качестве ограничений.

Пусть дана система вида

$$\begin{cases} f_1(x_1;x_2;...;x_n)=0, \\ f_2(x_1;x_2;...;x_n)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(x_1;x_2;...;x_n)=0. \end{cases} \qquad (42)$$

Тогда задача оптимизации для “**Поиска решения**” может звучать следующим образом. Найти значения $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, обращающие первое уравнение системы (42) в тождество при $n - 1$ ограничении, представленными оставшимися уравнениями. Решение данной задачи рассмотрим на примере.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} 8x_1+2x_2-8x_3=-24, \\ -2x_1-2x_2-10x_3=-48, \\ -2x_1+4x_2+8x_3=18. \end{cases}$$

Решение.

Для решения рассматриваемой системы разместим в ячейках текущего листа **A1, B2, D2, A6:A9** соответствующие поясняющие тексты (заголовки), в интервале **A3:C5** – элементы матрицы A, а в интервале **D3:D5** – элементы вектора B. Интервал **B7:B9** зарезервируем под искомое решение – вектор X (рис. 23). Запишем выражения для вычисления значений функций, стоящих слева в уравнениях системы.

	A	B	C	D
1	Решение СЛАУ (А Х = В) размерн			
2		Матрица А		Столбец В
3	8	2	-8	-24
4	-2	-2	-10	-48
5	-2	4	8	18
6	Решение Х			
7	x_1=			
8	x_2=			
9	x_3=			

Рис. 23.

Отведем под эти формулы интервал **C7:C9** текущего рабочего листа. В ячейку **C7** введем формулу **= A3 * $B$7 + B3 * $B$8 + C3 * $B$9 – – D3** и скопируем ее в **C8** и **C9**. В них появятся соответственно **=A4 * $B$7 + B4 * $B$8 + C4 * $B$9 – D4** и **= A5 * $B$7 + + B5 * $B$8 + C5 * $B$9 – D5**. Обратившись к пункту меню **Сервис⇒Поиск решения**, в окне диалога (рис. 24) зададим параметры поиска. Установим целевую ячейку **C7** равной нулю, решение в изменяемых ячейках **B7:B9**. Ограничения заданы формулами в ячейках **C8** и **C9**. После щелчка по кнопке **Выполнить** в интервале **B7:B9** получим результат (рис. 25) – решение заданной системы.

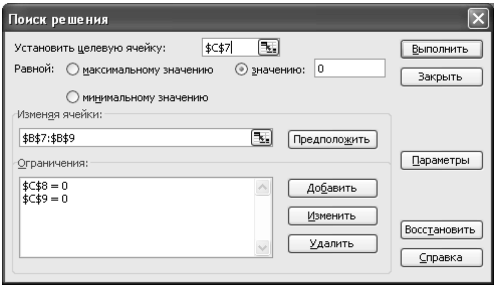

Рис. 24.

	A	B
6	Решение X	
7	x_1=	3
8	x_2=	-4
9	x_3=	5

Рис. 25.

Решение систем средствами MathCAD. MathCad представляет дополнительные возможности для решения систем линейных и нелинейных уравнений с числом уравнений и переменных, не превышающих 50. Эта возможность реализуется с помощью блока **Given** в сочетании с функциями **Find** или **Minerr**. При этом важно правильно оформить поставленную задачу. Для этого необходимо выполнить следующее:

- задать начальное приближение для всех неизвестных, входящих в систему уравнений;
- напечатать ключевое слово **Given**. Оно указывает MathCAD, что далее следует система уравнений;
- ниже или правее слова **Given** ввести уравнения и неравенства, входящие в систему, используя при наборе символ “=” (сочетание клавиш **[Ctrl]+=**). Между левыми и правыми частями неравенств может стоять любой из символов <, >, ≥ и ≤;
- ввести любое выражение, которое включает функцию **Find()**, например, $\boldsymbol{a}$**:= Find(**$\boldsymbol{x, y}$**)** или аналогичное выражение с функцией **Minerr**. В качестве аргументов этих функций нужно указать переменные, значения которых находим. Данные функции возвращают

решение системы уравнений. Число аргументов должно быть равно числу неизвестных.

Замечание. Функция **Find** применяется, если мы хотим найти точное решение системы, функция **Minerr –** если система не может быть решена точно, и мы хотим найти наилучшее приближение, обеспечивающее минимальную погрешность.

В том случае, если решение не может быть найдено при заданном выборе начального приближения, появится сообщение в красной рамке *Did not find solution* – решение не найдено.

Пример. Решить систему уравнений $\begin{cases} 1,4\cdot\cos(x-1)=1, \\ 0,4\cdot x^2-0,5\cdot y^2=1 \end{cases}$ в MathCad с точностью ε=10^{-6}. Графически показать решения системы.

Решение. Решение поставленной задачи показано на рис. 26.

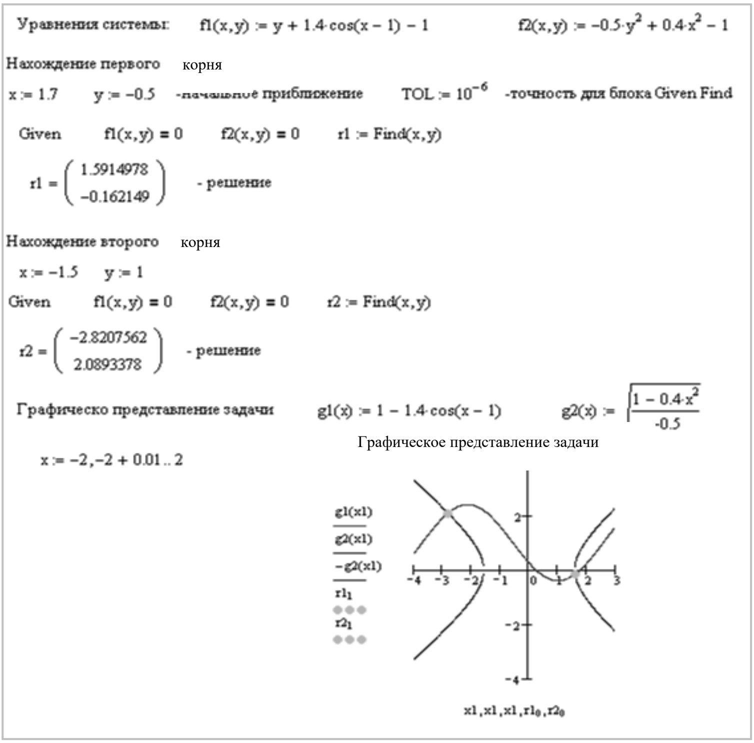

Рис. 26.

В случае если необходимо найти решение при различных начальных приближениях или система зависит от параметров, имеет смысл решение определить как функцию. В этом случае не нужно задавать начальные приближения перед началом блока **Given – Find**. Начальные приближения задаются в качестве аргументов функции – решения.

Пример. Найти одно решение системы уравнений:

$$\begin{cases} a\cdot\cos(x-1)=1, \\ b\cdot x^2 - c\cdot y^2 = 1 \end{cases}$$

с точностью $\varepsilon=10^{-6}$ при заданных значениях параметров:

1) a = 4, b = 0,2, c = 10; 2) a = 5, b = 10, c = 1.

Решение поставленной задачи показано на рис. 27.

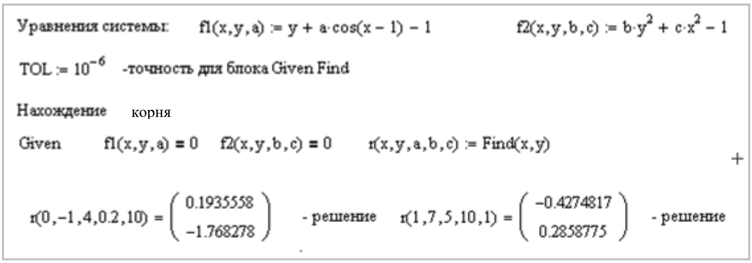

Рис. 27.

Аналогично решаются системы линейных уравнений. Во многих случаях решение системы уравнений может быть найдено не только численно, но и аналитически. Для этого также используется блок **Given** и функция **Find**, но вместо знака равенства после функции следует поставить знак символьного преобразования **–>** (Ctrl+).

Пример. Решить аналитически систему нелинейных уравнений, зависящую от параметра a:

$$\begin{cases} x^2 + 2\pi\cdot y = a, \\ -2\cdot x - z = 2, \\ y - z = 1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Решение данного примера в MathCAD показано на рис. 28. Результаты решения задачи записываются в виде матрицы, каждый столбец которой соответствует тройке (x; y; z).

Given

$$X^2 + 2\cdot\pi\cdot Y = a$$

$$-2\cdot X - Z = 2$$

$$Y - Z = 1$$

$$\mathrm{Find}(X,Y,Z) \rightarrow \begin{bmatrix} 2\cdot\pi + \left(4\cdot\pi^2 + 2\cdot\pi + a\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} & 2\cdot\pi - \left(4\cdot\pi^2 + 2\cdot\pi + a\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \\ -4\cdot\pi - 2\cdot\left(4\cdot\pi^2 + 2\cdot\pi + a\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} - 1 & -4\cdot\pi + 2\cdot\left(4\cdot\pi^2 + 2\cdot\pi + a\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} - 1 \\ -4\cdot\pi - 2\cdot\left(4\cdot\pi^2 + 2\cdot\pi + a\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} - 2 & -4\cdot\pi + 2\cdot\left(4\cdot\pi^2 + 2\cdot\pi + a\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} - 2 \end{bmatrix}$$

Рис. 28.

2. ЗАДАНИЯ, РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ДЛЯ АУДИТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 - 3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 - 2 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 - 1 = 0, \\ 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4 = 0 \end{cases}$$

матричным способом в Excel и MathCAD. Сравнить результаты.

2. Методом Гаусса в Excel и MathCAD решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 9y + 5z - 6t = -4,6, \\ x + y + z + t + 4u = 3,3, \\ -3x + 4y + 2z - t - u = 2,1, \\ 2x + 3z - 2u = -2,3, \\ 2y + 3z - 4t + 5u = 6,3. \end{cases}$$

Организовать контроль за вычислениями.

3. Методом квадратного корня в Excel и MathCAD решить системы уравнений:

$$\begin{cases} 81x_1 - 45x_2 + 45x_3 = 531, \\ -45x_1 + 50x_2 - 15x_3 = -460, \\ 45x_1 - 15x_2 + 38x_3 = 193. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2{,}25x_1 + 0{,}42x_2 + 0{,}35x_3 + 1{,}7x_4 = 1{,}3, \\ 0{,}42x_1 + 0{,}45x_2 + 0{,}17x_3 - 2{,}23x_4 = 1{,}5, \\ 0{,}35x_1 + 0{,}17x_2 + 6{,}37x_3 + 0{,}29x_4 = -0{,}41, \\ 1{,}7\ x_1 - 2{,}23x_2 + 0{,}29x_3 + 2{,}4x_4 = 0{,}3. \end{cases}$$

В Excel организовать контроль над вычислениями.

4. Решить систему методом прогонки в Excel и MathCAD

$$\begin{cases} -1{,}2\,x_1 + 3x_2 = 5, \\ 3x_1 - 7{,}3x_2 - 5x_3 = 7, \\ -x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 40, \\ -x_3 + x_4 = -7. \end{cases}$$

Правильность промежуточных расчетов в MathCAD проверить с помощью основного тождества.

5. Методом простой итерации решить систему

$$\begin{cases} 4x_1 + 0{,}24x_2 - 0{,}08x_3 = 8, \\ 0{,}09x_1 + 3x_2 - 0{,}15x_3 = 9, \\ 0{,}04x_1 - 0{,}08x_2 + 4x_3 = 20. \end{cases}$$

Оценить погрешность решения.

6. Методом Зейделя решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -3, \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$$

Оценить погрешность решения.

7. Приближенно найти положительные решения системы нелинейных уравнений методом Ньютона

$$\begin{cases} x_1 + 2\cdot\lg x_1 - x_2^2 = 0, \\ 5x_1^2 - x_1x_2 - 3x_1 = -1. \end{cases}.$$

8. Символьно решить системы уравнений в MathCAD:

$$\text{а)}\ \begin{cases} 3x + 4\pi y = a, \\ 2x + y = b; \end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases} 2y - \pi z = a, \\ \pi x - z = b, \\ 3y + x = c. \end{cases}$$

9. Решить систему линейных уравнений:

1) используя функции **Find**;

2) матричным способом и используя функцию **lsolve**;

3) методом Гаусса;

4) методом итерации.

Сравнить результаты вычислений.

$$\begin{cases} 3x + 5y - 9z + 4t - u = -19, \\ 12x + 16y - 5t - 8u = 84, \\ 6y + 9z - 7t + 9u = 29,6, \\ 2x + 3y + 4z + 5t - 6u = 29,9, \\ 7y + 11z - 9t + 15u = 24,3. \end{cases} .$$

10. Дана система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

Привести систему к каноническому виду и оценить сходимость итерационного процесса по нормам: $\| \ \|_m$, $\| \ \|_\ell$, $\| \ \|_k$.

11. Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + 2y + z = 1, \\ x + 3y + 2z = 3. \end{cases}$$

методом простой итерации, методом Якоби и Зейделя. Решение найти с точностью $\varepsilon=10^{-3}$. Оценить число итерационных шагов для каждого метода.

12. Средствами Excel и MathCAD решить системы уравнений:

а) $$\begin{cases} 10x - 9y + 4z + 6t + 5u = -30, \\ 2x - y + z - 2t + 3u = -9,5, \\ x + y - 4t - 9u = -15, \\ 7y + 6z - 8t = -13, \\ 2x + 6y - 14z + 20t - 17u = 106; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} xy = -4, \\ x^2 + 2y + \sqrt{x^2 + 2y + 1} = 1. \end{cases}$$

3. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Назовите прямые методы решения систем линейных уравнений.
2. Назовите итерационные методы решения систем линейных уравнений.
3. От чего зависит эффективность применения итерационных методов при решении СЛАУ?
4. В чем заключается суть матричного метода решения систем линейных уравнений? Особенности применения его в Excel и MathCAD.
5. В чем заключается суть метода Гаусса при решении СЛАУ?
6. Какая функция реализует метод Гаусса в MathCAD?
7. Каким образом ведется контроль вычислений при реализации метода Гаусса?
8. В каких случаях применяется метод Холецкого, в чем состоит суть этого метода?
9. В каких случаях применяется метод прогонки, в чем заключается суть этого метода?
10. Перечислите условия корректности и устойчивости метода прогонки.
11. В чем заключается суть итерационных методов решения СЛАУ?
12. Сформулируйте достаточные условия сходимости методов итерации для систем линейных уравнений.
13. Какие виды норм матриц вам известны и как их вычислять?
14. Как можно оценить число итераций, необходимое для достижения решения с заданной точностью?
15. Какие критерии окончания итерационного процесса применяются в итерационных методах?
16. Назовите особенности методов Якоби и Зейделя по сравнению с методом простой итерации решения СЛАУ.
17. В чем заключается сущность метода Ньютона для решения систем нелинейных уравнений?
18. Что называется матрицей Якоби?
19. Сформулируйте критерий окончания процесса метода Ньютона.
20. Назовите функции для решения систем уравнений в MathCAD и особенности их применения.

21. Как в символьном виде решить систему уравнений в MathCAD?

22. Как решить систему уравнений средствами Excel?

4. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задание 1. Решить систему линейных уравнений:

1) средствами MS Excel и MathCAD;
2) матричным способом;
3) методом Гаусса;
4) методом простой итерации;
5) методом Зейделя.

Для итерационных методов оценить сходимость процесса. Вычисления производить с точностью ε=0,0001.

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 22, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 17, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 8, \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 = -7. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -4, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = -7, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 26, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 34, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 26, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 9x_1 + 10x_2 - 7x_3 - x_4 = -23, \\ 7x_1 - x_3 - 5x_4 = 37, \\ 5x_1 - 2x_3 + x_4 = 22, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 26. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -18, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 28, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 11x_2 + x_3 + 2x_4 = 21. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 6x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = 15, \\ 2x_1 + x_2 + 10x_3 + 7x_4 = 12, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 7, \\ x_1 - 12x_2 + 2x_3 - x_4 = 17. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 15, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -15, \\ 9x_1 + 4x_3 - x_4 = 194, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -19. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 12, \\ 5x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 18, \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 9. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 - 2x_4 = -16, \\ 2x_1 - x_2 + 13x_3 + 4x_4 = 21, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 27, \\ x_1 - 12x_3 - 5x_4 = -19. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 8x_4 = -7, \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -8, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -10, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 7. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 7x_1 + 7x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 27, \\ 2x_1 - 2x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 15, \\ -x_2 + 2x_3 + x_4 = 18, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 17, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 30. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 5x_3 + x_4 = 12{,}4, \\ 7x_2 - 5x_3 - x_4 = -5{,}4, \\ 5x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 3x_1 - 9x_2 + x_3 + 6x_4 = 45. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 16{,}5, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -15, \\ 9x_1 + 4x_3 - x_4 = 19{,}4, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -19. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8{,}2, \\ 3x_1 + 3x_3 = 6{,}1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$

Задание 2. Решить систему уравнений $Ax = b$ методом Холецкого в Excel и MathCAD. Организовать контроль над вычислениями.

Номер варианта	*A*	*b*
1	25 0 –5 0 9 –3 –5 –3 83	–10 51 552
2	9 15 –18 15 50 –60 –18 –60 73	–21 –10 12
3	81 54 –18 54 45 –6 –18 –6 72	–27 –36 570
4	36 54 12 54 85 8 12 8 65	162 255 24

5	$\begin{matrix} 49 & -42 & -21 \\ -42 & 61 & 23 \\ -21 & 23 & 14 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -196 \\ 278 \\ 94 \end{matrix}$
6	$\begin{matrix} 81 & 63 & -9 \\ 63 & 58 & 11 \\ -9 & 11 & 53 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -873 \\ -661 \\ 213 \end{matrix}$
7	$\begin{matrix} 36 & 6 & -48 \\ 6 & 65 & -48 \\ -48 & -48 & 90 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 288 \\ 408 \\ -618 \end{matrix}$
8	$\begin{matrix} 10 & -5 & -4 \\ -5 & 74 & 34 \\ -4 & 34 & 45 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -57 \\ 625 \\ 377 \end{matrix}$
9	$\begin{matrix} 1 & -8 & -1 \\ -8 & 65 & 1 \\ -1 & 1 & 59 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 34 \\ -320 \\ 356 \end{matrix}$
10	$\begin{matrix} 64 & 64 & 8 \\ 64 & 68 & 16 \\ 8 & 16 & 66 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 64 \\ 60 \\ 0 \end{matrix}$
11	$\begin{matrix} 16 & -8 & 8 \\ -8 & 40 & 20 \\ 8 & 20 & 24 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -56 \\ -152 \\ -148 \end{matrix}$
12	$\begin{matrix} 16 & 16 & 0 \\ 16 & 97 & 72 \\ 0 & 72 & 68 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 64 \\ 793 \\ 684 \end{matrix}$
13	$\begin{matrix} 4 & -12 & 8 \\ -12 & 72 & -48 \\ 8 & -48 & 57 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 108 \\ -672 \\ 548 \end{matrix}$
14	$\begin{matrix} 36 & -42 & 18 \\ -42 & 74 & -26 \\ 18 & -26 & 59 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -264 \\ 548 \\ -572 \end{matrix}$
15	$\begin{matrix} 1 & -6 & -5 \\ -6 & 72 & 48 \\ -5 & 48 & 50 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 69 \\ -774 \\ -557 \end{matrix}$
16	$\begin{matrix} 49 & 7 & 0 \\ 7 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -105 \\ -87 \\ 288 \end{matrix}$

Задание 3. Методом прогонки решить систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = \lambda \\ x_1 + x_2 - 5x_3 & = 2\lambda \\ x_2 - x_3 + 3x_4 & = -\lambda^{-1} \\ x_3 + 7x_4 & = -\lambda \end{cases},$$

где λ – номер варианта ($\lambda = \overline{1,16}$).

Задание 4.

Графически определить начальное приближение решения системы. Решить систему нелинейных уравнений:

1) с помощью функции **Minerr** в MathCAD с точностью $\varepsilon=10^{-5}$;

2) методом Ньютона в MathCAD, сделав 5 итерационных шагов;

3) средствами Excel.

1. $\begin{cases} \sin x + 2y = 2, \\ \cos(y-1) + x = 0,7. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 2, \\ 2x^2 - y^2 + 2x - y = 4. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \cos x + y = 1,5, \\ 2x - \sin(y-0,5) = 1. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} xy(x+y) = 30, \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \sin(x-1) = 1,3 - y, \\ x - \sin(y+1) = 0,8. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} \cos(x+0,5) + y = 1, \\ \sin y - 2x = 2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(xy+2), \\ x + y = 6. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} \sin(x) - 2y = 1, \\ \sin(y-1) + x = 1,3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x - 3xy + y^2 = 3, \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} \sin(x+2) - y = 1,5, \\ \cos(y-2) + x = 0,5. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{5}{6}, \\ x - y = 5. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \cos(x-2) + y = 0, \\ \sin(y+0,5) - x = 1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2,5xy, \\ x - y = 0,25xy. \end{cases}$ 14. $\begin{cases} 3x^2y - 2xy - 6x + 4 = 0, \\ \dfrac{12x + 3y - 17}{3x - 2} = 1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2y - \sin(x-0,5) = 1, \\ \cos(y) + x = 1,5. \end{cases}$ 16. $\begin{cases} 3x^2 - 5xy - 6x + 10y = 0, \\ 7x + 6y = 32. \end{cases}$