

**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ,
НАУКИ И КАДРОВОЙ ПОЛИТИКИ**

**Учреждение образования
«БЕЛОРУССКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ
ОРДЕНОВ ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ»**

Кафедра высшей математики и физики

С. В. Курзенков

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

*Методические указания
для аудиторной и самостоятельной работы
студентов, обучающихся по специальности
7-07-0732-01 Строительство зданий и сооружений*

**Горки
БГСХА
2024**

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	3
1. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ.....	3
1.1. Встроенные возможности дифференцирования в MathCad.....	3
1.2. Применение производной в прикладных задачах численных методов...	5
1.3. Общая характеристика численного дифференцирования функций.....	7
1.4. Формулы численного дифференцирования для трех равноотстоящих узлов.....	8
1.5. Формулы численного дифференцирования для четырех равноотстоящих узлов.....	9
1.6. Задания, рекомендуемые для аудиторных занятий.....	10
3. ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ ПО ТЕМЕ «ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ».....	10
4. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ.....	12
4.1. Встроенные возможности интегрирования в MathCad	12
4.2. Общая характеристика методов численного интегрирования функций...	14
4.3. Понятие квадратурной формулы. Квадратурные формулы Ньютона- Котеса.....	15
4.4. Формулы прямоугольников приближенного вычисления определенного интеграла.....	21
4.5. Формула трапеций приближенного вычисления определенных интегралов.....	25
4.6. Формула парабол (Симпсона) приближенного вычисления определенных интегралов.....	29
4.7. Формула Гаусса.....	33
4.8. Задания, рекомендуемые для аудиторных занятий.....	37
5. ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ ПО ТЕМЕ «ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ».....	39

ВВЕДЕНИЕ

Дифференцирование и интегрирование функций – это основные операции, которые применяются при анализе различных процессов и явлений, поэтому они являются одними из наиболее часто встречающихся вычислительных задач. В методических указаниях рассмотрены различные подходы к выполнению этих операций с помощью прикладных пакетов программ Excel и MathCad. Весь материал разбит на разделы и подразделы, в которых содержится описание рассмотренных методов. Методические указания включают в себя набор заданий, рекомендуемых для решения на лабораторных занятиях. Все приведенные вычислительные схемы проиллюстрированы решениями типовых примеров в распространенных прикладных пакетах программ.

Данные методические указания представляют собой руководство по изучению основных математических методов численного дифференцирования и интегрирования функций средствами ЭВМ, которые рекомендуются для студентов мелиоративно-строительного факультета специальности 07-0732-01 «Строительство зданий и сооружений». Кроме этого, они могут быть использованы магистрантами и аспирантами в качестве пособия для самостоятельного изучения и закрепления материала по рассматриваемой теме с последующим применением приведенных методов для решения конкретных производственных задач.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы [Электронный ресурс] / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – Электрон. текстовые данные. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. – 639 с. – Режим доступа: <https://csc-knu.github.io/numerical-analysis/books/bahvalov-zhidkov-kobelkov-2015.pdf>
2. Зенков, А. В. Численные методы : учеб. пособие / А. В. Зенков. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2016. – 124 с.

1. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

1.1. Встроенные возможности дифференцирования в MathCad

Система MathCad дает пользователю широкий спектр возможностей аналитического дифференцирования функций и нахождения значения производной в точке. Рассмотрим их:

1) *нахождение производной функции через меню* (рис. 1);

Чтобы найти первообразную функции в MathCad необходимо:

– записать выражение функции и выделить в его любом месте аргумент (независимую переменную);

– войти в меню *Symbolics* → *Variable* → *Differentiate*.

Сделав эти действия, ниже записанного выражения функции появится ее производная (рис. 1).

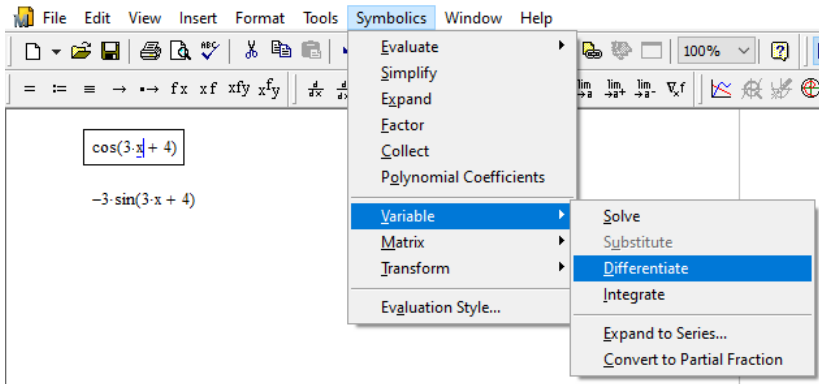


Рис. 1.

В приведенном примере производной функции $f(x) = \cos(3x + 4)$ является функция $f'(x) = -3 \sin(3x + 4)$.

2) нахождение производной функции через значок интегрирования (рис. 2);

Тот же самый результат можно получить через встроенный в MathCad значок аналитического дифференцирования функций \rightarrow . Для этого достаточно сформировать дифференциальную запись производной функции через соответствующий встроенный значок $\frac{d}{dx}$

$\cos(3x + 4)$

и, находясь, внутри записи этого интеграла нажать на значок аналитического вычисления \rightarrow . Результат таких действий можно увидеть на рис. 2. Хочется отметить, что аналогичным образом в MathCad через

значек $\frac{d^n}{dx^n}$ можно найти производные более высокого порядка

(в случае если они существуют) (рис. 2).

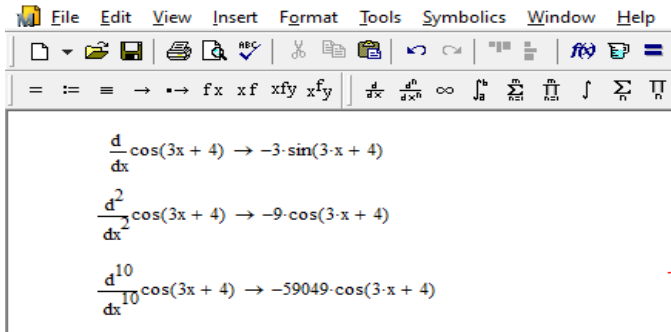


Рис. 2.

3) нахождение значений производных в MathCad;

Значение первой и пятой производной в MathCad найдем на примере уже рассмотренной выше функции $f(x) = \cos(3x + 4)$ в точках $x_0 = -5\frac{1}{4}$; $x_1 = \sqrt{3}$; $x_2 = 0,759$. Реализация этого задания показано на рис. 3.

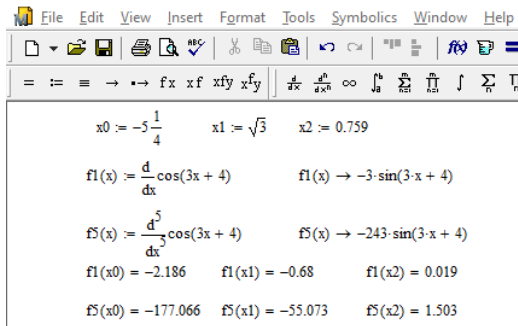


Рис. 3.

1.2. Применение производной в прикладных задачах численных методов

Большинство задач оценки погрешностей применяемого численного метода сводится к нахождению наибольшего значения производных различного порядка на известном отрезке $[a; b]$ от заданной функции, при условии того, что это задание функции аналитическое – $y = f(x)$.

Из курса математики такая задача решается по схеме нахождения наибольшего и наименьшего значения функции $y = f(x)$ на заданном отрезке $[a; b]$, которая сводится к следующим действиям:

1) для функции находят точки подозрительные на экстремум. Для этого вычисляется первая производная от заданной функции, приравнивается к нулю и решается сформированное уравнение $f'(x) = 0$;

2) из точек подозрительных на экстремум (найденных в п. 1), отбираются только те, которые принадлежат заданному отрезку $[a; b]$;

3) в отобранных точках (п. 2) определяются значения функции $y = f(x)$;

4) определяются значения функции $y = f(x)$ на концах отрезка $[a; b]$: $f(a)$ и $f(b)$;

5) из найденных значений функции п. п. 3 – 4 отбирается наибольшее и наименьшее значения.

Рассмотрим, как может быть решена подобная задача изученными выше способами в MathCad.

Пример. Найти в MathCad наибольшее и наименьшее значение второй производной функции $y = (2x - 4)^4$ на отрезке $[-3; 5]$.

Решение. Реализация поставленной задачи в MathCad показана на рис. 4.

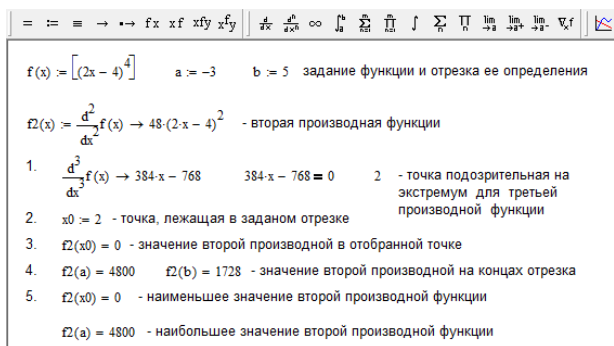


Рис. 4.

Для функции $y = (2x - 4)^4$ на отрезке $[-3; 5]$ наибольшее значение второй производной достигается на левой границе заданного отрезка $a = -3$ и равняется 4800, а наименьшее – в точке $x_0 = 2$ и равняется 0.

1.3. Общая характеристика численного дифференцирования функций

Напомним, что производной функции в точке x_0 называется предел отношения ее приращения к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к 0 и условии, что этот предел существует и конечен, т. е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если функция задана таблично

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
y	y_0	y_1	y_2	...	y_n

то приращение аргумента $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, как бы оно мало ни было, всегда конечно и его нельзя устремить к нулю. А значит от таких функций ее производную традиционными методами найти нельзя. Кроме того, встречаются случаи, когда функция задана аналитически, но очень громоздкой формулой. В перечисленных случаях, как правило, пользуются численным дифференцированием. Идея численного дифференцирования следующая: вместо функции $f(x)$ рассматривается некоторая «близкая» к ней функция $g(x)$, определяемая достаточно простой формулой, и поскольку $f(x) \approx g(x)$, постольку их производные, вероятно, близки $f'(x_0) \approx g'(x_0)$. А если обобщить данный принцип, то он должен действовать и для производных более высокого порядка.

Однако в действительности это, вообще говоря, не так: близость функции не предопределяет близость их производных. Это можно показать, опираясь на геометрический смысл производной $f'(x_0)$, выражающей тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 (рис. 5). Функции $f(x)$ и $g(x)$ близки, т. к. ординаты точек двух графиков при одинаковых абсциссах мало отличаются. Но направления касательных, проведенных к графикам (см., например, точку A рис. 5), различаются, а значит не близки. На основании этого можно утверждать, что выдвигнутая идея, вообще говоря, не работает.

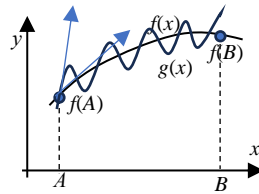


Рис. 5.

Однако было доказано, что если в качестве приближающей функции $g(x)$ использовать интерполяционный многочлен Лагранжа, построенный в узлах, характеризующих динамику изменения исходной функции

$f(x)$, то выдвинутая гипотеза работает и в этом случае даже возможно оценить возникающую при этом погрешность вычислений.

1.4. Формулы численного дифференцирования для трех равноотстоящих узлов

Имеются три узла x_0, x_1, x_2 , удаленные друг от друга на расстояние h . Интерполяционный многочлен Лагранжа в этом случае будет иметь вид:

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2.$$

Введем вспомогательную переменную $t = (x - x_0)/h$, тогда $x = x_0 + ht$, и получаем

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(t-1)(t-2)y_0 - t(t-2)y_1 + \frac{1}{2}t(t-1)y_2.$$

Тогда производную от этого приближения исходной функции можно найти по правилу дифференцирования сложной функции

$$(L_2(x))' = (L_2(x))'_t t'_x = \frac{1}{h}(L_2(x))'_t = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{2} y_0 (2t-3) - y_1 (2t-2) + \frac{1}{2} y_2 (2t-1) \right).$$

Аналогично для второй производной выражение будет иметь вид

$$f''(x) = (L_2(x))'' = \frac{1}{h^2} (y_0 - 2y_1 + y_2).$$

Принимая во внимание, что $x = x_0 + ht$ при $t = \overline{0, 2}$ значения первой и второй производных в заданных узлах можно найти по формулам:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} \left(-\frac{3}{2} y_0 + 2y_1 - \frac{1}{2} y_2 \right) + \frac{h^2}{3} M_3;$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{h} \left(-\frac{1}{2} y_0 + \frac{1}{2} y_2 \right) + \frac{h^2}{6} M_3;$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{2} y_0 - 2y_1 + \frac{3}{2} y_2 \right) + \frac{h^2}{3} M_3;$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} (y_0 - 2y_1 + y_2) - hM_3;$$

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2} (y_0 - 2y_1 + y_2) - \frac{h^2}{12} M_4;$$

$$f''(x_2) = \frac{1}{h^2} (y_0 - 2y_1 + y_2) - hM_3,$$

где $M_n = \max_{x \in [x_0; x_2]} f^{(n)}(x)$.

1.5. Формулы численного дифференцирования для четырех равноотстоящих узлов

Для четырех равноотстоящих узлов x_0, x_1, x_2, x_3 первая производная в этих узлах будет вычисляться по формулам:

$$f'(x_0) = \frac{1}{6h}(-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{4}M_4;$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{6h}(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3) + \frac{h^3}{12}M_4;$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{6h}(y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{12}M_4;$$

$$f'(x_3) = \frac{1}{6h}(-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3) + \frac{h^3}{4}M_4,$$

где $M_n = \max_{x \in [x_0; x_3]} f^{(n)}(x)$.

Вторая производная в узлах вычисляется следующим образом:

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}(2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3) + \frac{11}{12}h^2M_4;$$

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) - \frac{1}{12}h^2M_4;$$

$$f''(x_2) = \frac{1}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3) - \frac{1}{12}h^2M_4;$$

$$f''(x_3) = \frac{1}{h^2}(-y_0 + 4y_1 - 5y_2 + 2y_3) + \frac{11}{12}h^2M_4;$$

где $M_n = \max_{x \in [x_0; x_3]} f^{(n)}(x)$.

Хочется отметить, с увеличением количества узлов точность формул численного дифференцирования повышается и уменьшается с ростом порядка производной.

1.6. Задания, рекомендуемые для аудиторных занятий

1. Средствами MathCad найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 12x + 4$ на отрезке $[-2; 3]$.

2. В MathCad найдите наибольшее значение третьей производной функции $f(x) = \ln^2(x - 12)$ на отрезке $[14; 30]$.

3. Протабулировать функцию $f(x) = \sqrt{\sin(2x - \frac{\pi}{36})}$ на отрезке $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ с шагом $h = \frac{\pi}{4}$. Используя формулы численного дифференцирования для полученной табличной функции в Excel и MathCad найдите значения ее первой и второй производных в узлах задания функции. Оцените в MathCad погрешности первых и вторых производных функции в узлах задания, записав их с тремя значащими цифрами после запятой.

4. Для функции $f(x)$ в Excel, заданной в виде таблицы в четырех узлах $x_i, i = \overline{0,3}$ найти значения ее второй производной в узлах, используя формулы численного дифференцирования. В MathCad по формуле Лагранжа восстановить приближенное задание функции $f(x)$ и оценить погрешности первых производных функции в узлах задания, записав их с одной значащей цифрой после запятой.

x_i	0,621	0,623	0,625	0,627
y_i	5,169	5,184	5,198	5,213

3. ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ ПО ТЕМЕ «ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ»

Для функции $f(x)$ в Excel, заданной в виде таблицы в четырех узлах $x_i, i = \overline{0,3}$ найти значения ее первой и второй производных в узлах, используя формулы численного дифференцирования.

В MathCad по формуле Лагранжа восстановить приближенное задание функции $f(x)$ и оценить погрешности первых производных функции в узлах задания. Запишите данные погрешности с двумя значащими цифрами.

<p>1.</p> <table style="border: none;"> <tr> <td style="padding-right: 20px;">x_i</td> <td>y_i</td> </tr> <tr> <td>1,25</td> <td>4,828</td> </tr> <tr> <td>1,27</td> <td>4,844</td> </tr> <tr> <td>1,29</td> <td>4,859</td> </tr> <tr> <td>1,31</td> <td>4,875</td> </tr> </table>	x_i	y_i	1,25	4,828	1,27	4,844	1,29	4,859	1,31	4,875	<p>2.</p> <table style="border: none;"> <tr> <td style="padding-right: 20px;">x_i</td> <td>y_i</td> </tr> <tr> <td>13,5</td> <td>4,905</td> </tr> <tr> <td>13,7</td> <td>4,920</td> </tr> <tr> <td>13,9</td> <td>4,934</td> </tr> <tr> <td>14,1</td> <td>4,948</td> </tr> </table>	x_i	y_i	13,5	4,905	13,7	4,920	13,9	4,934	14,1	4,948
x_i	y_i																				
1,25	4,828																				
1,27	4,844																				
1,29	4,859																				
1,31	4,875																				
x_i	y_i																				
13,5	4,905																				
13,7	4,920																				
13,9	4,934																				
14,1	4,948																				

3.	x_i	y_i	4.	x_i	y_i
	0,145	4,976		0,451	0,435
	0,147	4,990		0,452	0,436
	0,149	5,003		0,453	0,437
	0,151	5,017		0,454	0,438
5.	x_i	y_i	6.	x_i	y_i
	0,724	0,900		0,349	0,341
	0,725	0,899		0,350	0,3429
	0,726	0,8991		0,351	0,3438
	0,727	0,8997		0,352	0,3448
7.	x_i	y_i	8.	x_i	y_i
	0,725	0,663		0,251	0,248
	0,727	0,665		0,254	0,251
	0,729	0,666		0,257	0,254
	0,731	0,668		0,260	0,257
9.	x_i	y_i	10.	x_i	y_i
	0,112	1,294		0,341	2,193
	0,113	1,297		0,343	2,203
	0,114	1,300		0,345	2,213
	0,115	1,303		0,347	2,223
11.	x_i	y_i	12.	x_i	y_i
	0,441	2,761		0,119	1,315
	0,445	2,786		0,121	1,321
	0,449	2,812		0,123	1,327
	0,453	2,838		0,125	1,333
13.	x_i	y_i	14.	x_i	y_i
	0,117	1,309		0,750	5,623
	0,122	1,324		0,751	5,636
	0,127	1,339		0,752	5,649
	0,132	1,355		0,753	5,662
15.	x_i	y_i	16.	x_i	y_i
	0,501	3,169		0,521	3,319
	0,503	3,184		0,523	3,334
	0,505	3,198		0,525	3,350
	0,507	3,213		0,527	3,365

4. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

4.1. Встроенные возможности интегрирования в MathCad

В MathCad существуют широкие возможности как аналитического, так и численного интегрирования функций в автоматическом режиме. Продемонстрируем их:

1) *нахождение первообразной функции через меню (в случае, если она существует)* рис. 1;

Чтобы найти первообразную функции в MathCad необходимо:

- записать выражение функции и выделить в его любом месте аргумент (независимую переменную);
- войти в меню *Symbolics* → *Variable* → *Integrate*.

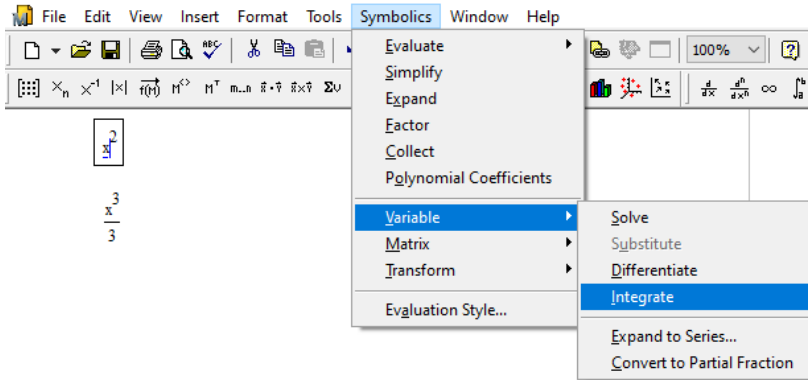


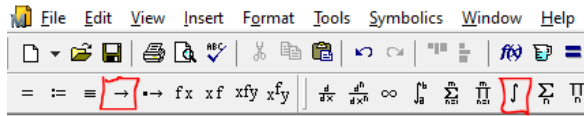
Рис. 1.

Сделав эти действия, ниже записанного выражения функции появится ее первообразная (рис. 1). В приведенном примере первообразной функции $f(x) = x^2$ является функция $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$.

2) *нахождение первообразной функции через значок интегрирования (в случае, если она существует)* рис. 2;

Тот же самый результат можно получить через встроенный в MathCad значок аналитического интегрирования функций. Для этого достаточно сформировать запись неопределенного интеграла через соответствующий встроенный значок $\int x^2 dx$ и находясь внутри записи

этого интеграла нажать на значок аналитического вычисления \rightarrow . Результат таких действий можно увидеть на рис. 2.



$$\int x^2 dx \rightarrow \frac{x^3}{3}$$

Рис. 2.

3) *нахождение определенного интеграла через встроенную функцию MathCad;*

Интегрирование в MathCad реализовано в виде вычислительного оператора, допускающего нахождение интегралов не только от функций одной переменной, но и функций нескольких переменных при последовательном вычислении кратных интегралов. При этом пределы интегрирования могут быть как конечными, так и бесконечными, а значит речь идет о вычислении как определенных, так и несобственных интегралов. А результат такого интегрирования может быть приведен как на множестве действительных, так и на множестве комплексных чисел.

Для удобства пользователя вычисление интеграла в MathCad выполняется с помощью значка определенного интеграла реализуя принцип «как пишется, так и вводится».

Чтобы получить результат интегрирования, следует ввести знак равенства или символического равенства. В первом случае интегрирование будет проведено численным методом, во втором – в случае успеха будет найдено точное значение интеграла с помощью символического процессора Mathcad.

Например, следующие записи в MathCad необходимо интерпретировать следующим образом:

$$\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx = 1,494 \text{ – интеграл посчитан численно с помощью встроенных численных методик;}$$

$\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx \rightarrow \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(1)$ – интеграл посчитан точно с помощью встроен-

ного символьного процессора, при этом $\operatorname{erf}(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-x^2} dx$.

Результаты численного и символьного вычисления интеграла $\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx$ в MathCad показаны на рис. 3.

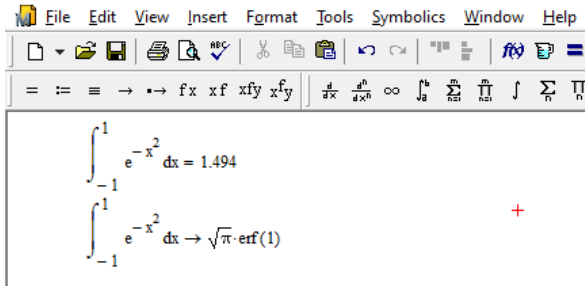


Рис. 3.

Хочется отметить, что символьное интегрирование возможно только для сравнительно небольшого круга несложных подынтегральных функций. В случае, когда интегрирование функций завершается знаком равенства « \Rightarrow » могут быть использованы следующие алгоритмы численного вычисления:

- метод Ромберга – для большинства функций, не содержащих особенностей;
- адаптивный метод – для функций, быстро меняющихся на интервале интегрирования;
- для несобственных интегралов с бесконечными пределами;
- модифицированный метод Ромберга для функций, не определенных на одном или обоих концах интервала интегрирования.

По умолчанию выбор метода численного интегрирования остается за системой MathCad.

4.2. Общая характеристика методов численного интегрирования функций

Известно, что определённый интеграл можно вычислить по формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Однако класс интегрируемых функций довольно узкий.

Например, интегралы $\int \frac{x}{\sin(x)} dx$, $\int e^{-x^2} dx$. В данном случае подын-

тегральные функции этих интегралов не интегрируемы в элементарных функциях, а сами интегралы считаются не берущимися.

Кроме этого случая, часто приходится интегрировать функции, заданные таблично или графически. В таких ситуациях первообразная $F(x)$ подынтегральной функции не известна. Как правило, для ее отыскания используется интерполяция функций, заданных таблично или графически, с последующим интегрированием результата интерполирования. Такой способ численного интегрирования даёт достаточно точные результаты только при условии, что исходная функция заведомо гладкая.

Бывают случаи, когда подынтегральная функция задана аналитически и интеграл берущийся, но первообразная сложна и слишком громоздка для дальнейшего ее использования.

Во всех этих случаях приходится прибегать к приближенному, численному нахождению определенных интегралов, заменяя подынтегральную функцию $f(x)$ на «близкую» к ней, которая легко интегрируется.

4.3. Понятие квадратурной формулы. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса.

Пусть приближенно требуется вычислить значение интеграла $\int_a^b f(x) dx$. При этом не исключаются случаи, когда подынтегральная функция $f(x)$ на отрезке интегрирования $[a; b]$ может иметь некоторые особенности. Так, например, могут существовать точки, в которых функция имеет резко изменяющиеся или разрывные производные внутри промежутка интегрирования. В таких ситуациях мы должны заранее освободиться от таких особенностей. Делается это путём разложения подынтегральной функции на 2 сомножителя, т. е. представление интеграла в виде

$$\int_a^b p(x) \cdot f(x) dx$$

где $[a; b]$ – любой конечный или бесконечный отрезок числовой оси;
 $p(x)$ – весовая функция (интегрируемая положительная на отрезке $[a; b]$ функция), учитывающая особенности поведения подынтегральной функции;

$f(x)$ – гладкая функция (или сеточная (таблично заданная) функция).

Такой интеграл можно приближенно оценить по формуле

$$\int_a^b p(x) \cdot f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n C_k \cdot f(x_k),$$

где C_k – квадратурные коэффициенты;

x_k – квадратурные узлы отрезка $[a; b]$.

Сама формула называется *квадратурной формулой вычисления интеграла*, а сумма, характеризующая правую часть этого приближенного равенства – *квадратурной суммой*.

Можно заметить, что квадратурная сумма однозначно определяется $2n + 1$ параметром: n значений квадратурных коэффициентов C_k , n значений квадратурных узлов x_k и сам параметр n , который характеризует число точек (узлов сетки) разбиения отрезка $[a; b]$. Так как точность вычисления интеграла зависит от числа разбиений n , то значение n должно быть достаточно велико. Остальные же параметры должны быть подобраны так, чтобы сеточные значения функция при интегрировании давали наилучшее приближение функций $f(x)$. Если функция $f(x)$ известна или задана таблицей значений $f(x_k)$ в некоторой системе узлов x_k ($k = \overline{0, n}$) и на выбор коэффициентов не налагаются дополнительные ограничения, то используют интерполяционные квадратурные формулы. Основой для таких формул служит полином Лагранжа.

1. По узловым точкам строится интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{W_k^n(x)}{W_k^n(x_k)} \cdot f(x_k) = \frac{(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2) \dots (x_0-x_{n-1})(x_0-x_n)} f(x_0) +$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2) \dots (x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2) \dots (x_1-x_{n-1})(x_1-x_n)} f(x_1) +$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3) \dots (x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3) \dots (x_2-x_{n-1})(x_2-x_n)} f(x_2) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\cdots(x_3-x_{n-1})(x_1-x_n)} f(x_3) + \\
& + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\cdots(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\cdots(x_3-x_{n-1})(x_1-x_n)} f(x_3) + \dots + \\
& + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{n-2})(x-x_n)}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)(x_{n-1}-x_2)(x_{n-1}-x_3)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})(x_{n-1}-x_n)} f(x_{n-1}) + \\
& + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)\cdots(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})} f(x_n),
\end{aligned}$$

где $W_k^n(x) = \frac{W_n(x)}{x-x_k}$;

$$W_n = \prod_{k=0}^n (x-x_k).$$

2. Считая $f(x) = L_n(x)$, получаем

$$\int_a^b p(x) \cdot f(x) dx = \sum_{k=1}^n C_k \cdot f(x_k)$$

где $C_k = \frac{1}{W_k^n(x_k)} \int_a^b W_k^n(x) \cdot p(x) dx$ – интеграл от интерполяционного многочлена Лагранжа.

Квадратурные формулы, у которых коэффициенты C_k определяются данным способом называются квадратурными формулами Ньютона-Котса (Котеса) порядка n в честь выдающихся ученых Исаака Ньютона и Роджера Котса. Эти квадратурные формулы позволяют производить численное интегрирование функций в одинаково отстоящих друг от друга точках (узлах сетки).

Пример 1. Вычислить коэффициенты Котеса $C_1(x_0)$ и $C_1(x_1)$ на отрезке $[a; b]$ для дифференцируемой подынтегральной функции $f(x)$. Записать квадратурную формулу Ньютона-Котеса 1-го порядка для численного вычисления интеграла $\int_a^b f(x) dx$. Сформулировать геометрический смысл полученной формулы.

Решение. Условие задачи предполагает, что подынтегральная функция $f(x)$ гладкая и непрерывная, а значит не имеет особенностей на отрезке интегрирования $[a; b]$. При этом значения функции $f(x)$ определены в двух узлах $x_0 = a$ и $x_1 = b$, а $p(x) \equiv 1$.

Вычислив коэффициенты Котеса $C_1(x_0)$ и $C_1(x_1)$ на отрезке $[a; b]$.

$$\begin{aligned} C_1(x_0) &= \frac{1}{W_0'(x_0)} \int_a^b W_0'(x) dx = \frac{1}{x_0 - x_1} \int_a^b (x - x_1) dx = \left. \frac{x^2 - 2x_1x}{2} \right|_{x_1=b}^{x_0=a} = \\ &= \frac{1}{a-b} \int_a^b (x-b) dx = \frac{\left(\frac{x^2}{2} - bx \right)}{a-b} \Big|_a^b = \frac{\left(\frac{b^2}{2} - b^2 + \frac{a^2}{2} - ba \right)}{a-b} = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{2(b-a)} = \\ &= \frac{b^2 - 2ab + a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)^2}{2(b-a)} = \frac{b-a}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1(x_1) &= \frac{1}{W_1'(x_1)} \int_a^b W_1'(x) dx = \frac{1}{x_1 - x_0} \int_a^b (x - x_0) dx = \left. \frac{x^2 - 2x_0x}{2} \right|_{x_0=a}^{x_1=b} = \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (x-a) dx = \frac{\left(\frac{x^2}{2} - ax \right)}{b-a} \Big|_a^b = \frac{\left(\frac{b^2}{2} - ba - \frac{a^2}{2} + a^2 \right)}{b-a} = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{2(b-a)} = \\ &= \frac{b^2 - 2ab + a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)^2}{2(b-a)} = \frac{b-a}{2}. \end{aligned}$$

Запишем квадратурную формулу Ньютона-Котеса 1 порядка для численного вычисления интеграла

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} f(a) + \frac{b-a}{2} f(b) = \frac{f(b) + f(a)}{2} \cdot (b-a).$$

Сформулируем геометрический смысл полученной формулы: определенный интеграл по отрезку $[a; b]$ (геометрически равный площади криволинейной трапеции) в первом приближении может быть подсчитан, как площадь прямоугольной трапеции с высотой, равной $b - a$ и основаниями, равными соответственно $f(a)$ и $f(b)$ (рис. 4).

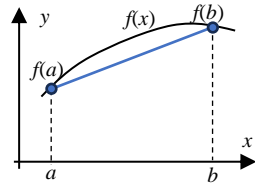


Рис. 4.

Квадратурные формулы Ньютона – Котеса для равноотстоящих узлов на заданном отрезке.

Приведем более простую запись квадратурных формул, которые применяются для вычисления интеграла

$$\int_a^b f(x) dx$$

с постоянной весовой функцией ($p(x) \equiv 1$) для равноотстоящих узлов: $x_0 = a; x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \dots, x_{n-1} = a + (n-1)h, x_n = a + nh = b$ на заданном конечном отрезке интегрирования $[a; b]$. Для этого случая квадратурная формула может быть переписана в виде

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{k=0}^n B_k^n \cdot f(a+k \cdot h),$$

где $B_k^n = \frac{(-1)^{n-k}}{n \cdot k! (n-k)!} \cdot \int_0^n \frac{\prod_{k=0}^n (t-k)}{t-k} dt$;

$$h = \frac{b-a}{n};$$

n – число точек разбиения отрезка $[a; b]$.

$$k = \overline{0, n}.$$

Приведем фрагмент таблицы коэффициентов B_k^n Котеса при $n = \overline{1, 6}$.

Коэффициенты Котеса для равноотстоящих узлов

n	B_k^n
1	$B_0^1 = B_1^1 = \frac{1}{2}$
2	$B_0^2 = B_2^2 = \frac{1}{6}; B_1^2 = \frac{2}{3}$
3	$B_0^3 = B_3^3 = \frac{1}{8}; B_1^3 = B_2^3 = \frac{3}{8}$
4	$B_0^4 = B_4^4 = \frac{7}{90}; B_1^4 = B_3^4 = \frac{16}{45}; B_2^4 = \frac{2}{15}$
5	$B_0^5 = B_5^5 = \frac{19}{288}; B_1^5 = B_4^5 = \frac{25}{96}; B_2^5 = B_3^5 = \frac{25}{144}$
6	$B_0^6 = B_6^6 = \frac{41}{840}; B_1^6 = B_5^6 = \frac{9}{35}; B_2^6 = B_4^6 = \frac{9}{280}; B_3^6 = \frac{34}{105}$

Рассмотрим вариант применения этой таблицы для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ по трем равноотстоящим узловым значениям: a , b и $\frac{a+b}{2}$. В этом случае можем записать

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \left(\frac{1}{6} f(a) + \frac{2}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} f(b) \right).$$

Пример 2. Используя квадратурную формулу Ньютона-Котеса 4-го порядка в MathCad вычислить определенный интеграл $\int_{2.2}^{3.74} (2x-4)^4 dx$.

Погрешность R_4 применяемой формулы оценить как разность результата численного вычисления интеграла и его точного значения.

Решение приведенного примера в MathCad показано ниже на рис. 5.

$\Gamma := \int_{2.2}^{3.74} (2x-4)^4 dx = 51.03727828$ - точное значение интеграла
 Приближенное интегрирование с помощью квадратурной формулы Ньютона-Котеса
 $a := 2.2$ $b := 3.74$ $n := 4$ $f(x) := (2x-4)^4$ $h := \frac{b-a}{n}$ $h = 0.385$
 $B(n,k) := \frac{(-1)^{n-k}}{n \cdot k! \cdot (n-k)!} \int_0^n \prod_{k=0}^n \frac{(t-k)}{t-k} dt$
 $k := 0..n$ $x_k := a + k \cdot h$
 $B(n,k) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{7}{90} \\ \frac{16}{45} \\ \frac{2}{15} \\ \frac{16}{45} \\ \frac{7}{90} \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} 2.2 \\ 2.585 \\ 2.97 \\ 3.355 \\ 3.74 \end{pmatrix}$
 $\Gamma \approx (b-a) \cdot \sum_{k=0}^n (B(n,k) \cdot f(x_k))$ $\Gamma \approx 51.03727828$ - приближенное значение интеграла

Рис. 5. Реализация квадратурной формулы Ньютона-Котеса 4-го порядка для численного вычисления определенного интеграла

Анализ такого решения показывает, что до 13 разряда после запятой точное значение совпадает с приближенным. При этом погрешность такого численного вычисления интеграла $\int_{2.2}^{3.74} (2x-4)^4 dx$ не превысит $3 \cdot 10^{-14}$.

Погрешность R формулы Ньютона-Котеса может быть оценена по следующей формуле

$$R_n \leq \frac{M_{n+1}(b-a)^{n+2}}{(n+1)!},$$

где $M_{n+1} = \max_{x \in [a;b]} |f^{(n+1)}(x)|$.

Отсюда видно, что уменьшения погрешности формулы Ньютона-Котеса можно достичь двояко: увеличением порядка n применяемой формулы и (или) сужением отрезка интегрирования. Но первый путь малопривлекателен: формула Ньютона-Котеса при большом n становится громоздкой и неудобной для использования.

Удобнее воспользоваться второй возможностью: отрезок интегрирования разбить на узкие участки, на каждом из которых даже формула Ньютона-Котеса небольшого порядка n обеспечит достаточную точность. Таким путем мы придем к известным формулам численного интегрирования – формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона.

4.4. Формулы прямоугольников приближенного вычисления определенного интеграла

Суть методов прямоугольников приближенного вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ заключается в том, что на каждом из частичных отрезков $[x_{k-1}; x_k]$ отрезка интегрирования $[a; b]$ площадь криволинейной трапеции, ограниченная графиком функции $f(x)$, заменяется площадью прямоугольника со сторонами h и $f(t_k)$. При этом различают формулы левых и правых прямоугольников.

Для формулы левых прямоугольников в качестве t_k принимают $x_k = x_0 + kh$, где $k = \overline{0, n-1}$. Тогда формула левых прямоугольников численного интегрирования функций на отрезке $[a; b]$ записывается в виде

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) = h(f(x_0) + f(x_0 + h) + \dots + f(x_0 + (n-1)h)) = h \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(x_0 + kh).$$

Геометрическая интерпретация формулы левых прямоугольников показана на рис. 6.

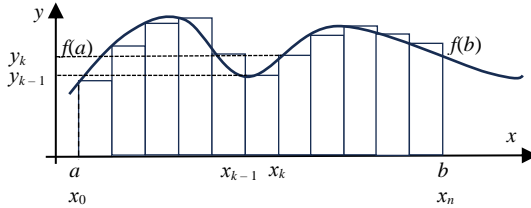


Рис. 6.

Для формулы *правых* прямоугольников в качестве t_k принимают $x_k = x_0 + kh$, где $k = \overline{1, n}$. Тогда формула правых прямоугольников численного интегрирования функций на отрезке $[a; b]$ записывается в виде

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)) = h(f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h) + \dots + f(x_0 + nh)) = h \cdot \sum_{k=0}^n f(x_0 + kh).$$

Геометрическая интерпретация формулы левых прямоугольников показана на рис. 7.

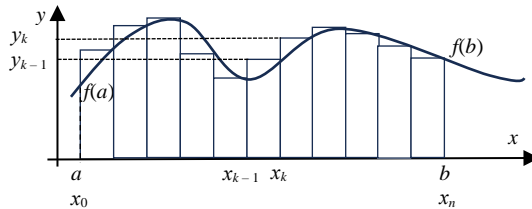


Рис. 7.

Пример. Применяя формулы левых и правых прямоугольников в Excel и MathCad при $n = 6$ приближенно вычислить определенный интеграл $\int_0^{\pi} \sqrt{3 + \cos(x)} dx$. Сравнить полученные результаты.

Решение. Рассмотрим реализацию методов прямоугольников в Excel.

а) Сформируем в Excel макет-таблицу метода левых прямоугольников рис. 8.

Тогда результаты вычислений будут иметь вид, показанный на рис. 9.

	A	B	C	D	E
1	Вычисление определенного интеграла методом левых прямоугольников				
2	x	$f(x)$	a	b	h
3	=C3	=КОРЕНЬ(3+COS(A3))	0	=ПИ()	=(D3-C3)/6
4	=A3+\$E\$3	=КОРЕНЬ(3+COS(A4))			
5	=A4+\$E\$3	=КОРЕНЬ(3+COS(A5))			
6	=A5+\$E\$3	=КОРЕНЬ(3+COS(A6))			
7	=A6+\$E\$3	=КОРЕНЬ(3+COS(A7))			
8	=A7+\$E\$3	=КОРЕНЬ(3+COS(A8))			
9					
10	Результат=E3*СУММ(B3:B8)				

Рис. 8.

	A	B	C	D	E
1	Вычисление определенного интеграла методом левых прямоугольников				
2	x	$f(x)$	a	b	h
3	0		2	0	3,1416
4	0,5236	1,96622			
5	1,0472	1,87083			
6	1,5708	1,73205			
7	2,0944	1,58114			
8	2,6180	1,46081			
9					
10	Результат				

Рис. 9.

б)

Сформируем в Excel макет-таблицу метода правых прямоугольников рис. 10 с результатами вычислений, показанными на рис. 11.

	H	I	J	K	L
1	Вычисление определенного интеграла методом правых прямоугольников				
2	x	$f(x)$	a	b	h
3	=J3	=КОРЕНЬ(3+COS(H3))	0	=ПИ()	=(K3-J3)/6
4	=H3+\$E\$3	=КОРЕНЬ(3+COS(H4))			
5	=H4+\$E\$3	=КОРЕНЬ(3+COS(H5))			
6	=H5+\$E\$3	=КОРЕНЬ(3+COS(H6))			
7	=H6+\$E\$3	=КОРЕНЬ(3+COS(H7))			
8	=H7+\$E\$3	=КОРЕНЬ(3+COS(H8))			
9	=H8+\$E\$3	=КОРЕНЬ(3+COS(H9))			
10	Результат=L3*СУММ(I4:I9)				

Рис. 10.

	H	I	J	K	L
1	Вычисление определенного интеграла методом правых прямоугольников				
2	x	$f(x)$	a	b	h
3	0		2	0	3,1416
4	0,5236	1,96622			
5	1,0472	1,87083			
6	1,5708	1,73205			
7	2,0944	1,58114			
8	2,6180	1,46081			
9	3,1416	1,41421			
10	Результат				

Рис. 11.

в) Покажем реализации этих же формул в MathCAD рис. 12.

Метод левых прямоугольников

$$a := 0 \quad b := \pi \quad h := \frac{b - a}{6} = 0.5236 \quad k := 0..5 \quad x_k := a + k \cdot h$$

$$f(x) := \sqrt{3 + \cos(x)}$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.524 \\ 1.047 \\ 1.571 \\ 2.094 \\ 2.618 \end{pmatrix} \quad f(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1.966 \\ 1.871 \\ 1.732 \\ 1.581 \\ 1.461 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ипр} := h \cdot \sum_{k=0}^5 f(x_k) = 5.55593 \text{ - результат}$$

Метод правых прямоугольников

$$a1 := 0 \quad b1 := \pi \quad h1 := \frac{b1 - a1}{6} = 0.5236 \quad k1 := 1..6 \quad x_{k1} := a1 + k1 \cdot h1$$

$$f1(x) := \sqrt{3 + \cos(x)}$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.524 \\ 1.047 \\ 1.571 \\ 2.094 \\ 2.618 \\ 3.142 \end{pmatrix} \quad f1(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1.966 \\ 1.871 \\ 1.732 \\ 1.581 \\ 1.461 \\ 1.414 \end{pmatrix}$$

$$\text{Прав} := h1 \cdot \sum_{k1=1}^6 f1(x_{k1}) = 5.24922 \text{ - результат}$$

Рис. 12.

Таким образом, приближенные результаты вычисления интеграла

$$\int_0^{\pi} \sqrt{3 + \cos(x)} dx \text{ при числе разбиений отрезка интегрирования } n = 6 \text{ со-}$$

ставили соответственно 5,55593 по формуле левых прямоугольников и 5,24922 по формуле правых прямоугольников. Точное значение этого интеграла составляет 5,40258, что фактически равняется среднему арифметическому значению полученных результатов

$$\frac{5,55593 + 5,24922}{2} = 5,40258.$$

4.5. Формула трапеций приближенного вычисления определенных интегралов

Рассмотрим квадратурную формулу Ньютона-Котеса 1-го порядка для всего отрезка интегрирования $[a; b]$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{2} \cdot [f(a) + f(b)].$$

Очевидно, что применение этой формулы для всего отрезка интегрирования приведёт к заведомо большой погрешности. Поэтому для её уменьшения предварительно разбивают отрезок $[a; b]$ на достаточно большое число интервалов точками $x_k = a + kh$, где $k = \overline{0, n-1}$ и к каждому из них применяют приведенную выше формулу, суммируя результаты по всем частичным отрезкам. Это позволяет получить общую формулу трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n} (f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots + 2f(a+(n-1)h) + f(b)) = h \cdot \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) \right],$$

где $h = (b-a)/n$;

n – число разбиений;

$x_0 = a$; $x_k = a + hk$, $k = \overline{1, n-1}$; $x_n = b$.

С геометрической точки зрения это означает, что криволинейная трапеция (при $f(x) > 0$), площадь которой численно равна определенному интегралу $\int_a^b f(x)dx$, приближенно заменяется фигурой, ограниченной сверху ломанной, соединяющей точки ее разбиения отрезками прямых (рис. 13).

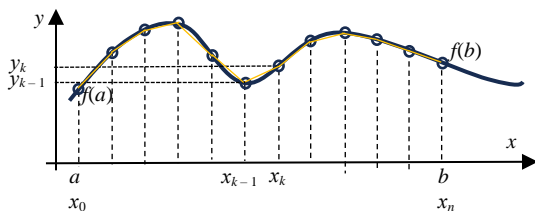


Рис. 13.

Если подынтегральная функция дважды дифференцируемая, то погрешность формулы трапеций можно оценить следующим образом

$$R_n = \frac{(b-a)h^2}{12} M_2,$$

где $M_2 = \max_{x \in [a; b]} |f''(x)|$.

Оценка M_2 в приведенной выше формуле вносит определенную сложность в практическое ее применение, поэтому на практике при приближенном вычислении интегралов по формулам прямоугольников и трапеций их погрешность оценивают как абсолютную величину разности результатов интегрирования при n и $2n$ разбиениях промежутка интегрирования, т. е.

$$R_n = |I_{2n} - I_n|.$$

Пример. По формуле трапеций в Excel и MathCad при $n = 12$ при-

ближенно вычислить определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{7} \sin^2(x)} dx$. Оценить погрешность вычислений как абсолютную величину разности результатов интегрирования при n и $2n$ разбиениях промежутка интегрирования.

Решение.

а) Сформируем в Excel макет-таблицу метода трапеций при числе разбиений $n = 12$ (рис. 14). Результаты вычислений по данной таблице приведем на рис. 15.

	A	B	C	D	E
1	Вычисление определенного интеграла методом трапеций при $n = 12$				
2	x	f(x)	a	b	h
3	=C3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(A3)^2)	0	=ПИ()/2	=(D3-C3)/12
4	=A3+\$E\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(A4)^2)			
5	=A4+\$E\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(A5)^2)			
6	=A5+\$E\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(A6)^2)			
7	=A6+\$E\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(A7)^2)			
8	=A7+\$E\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(A8)^2)			
9	=A8+\$E\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(A9)^2)			
10	=A9+\$E\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(A10)^2)			
11	=A10+\$E\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(A11)^2)			
12	=A11+\$E\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(A12)^2)			
13	=A12+\$E\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(A13)^2)			
14	=A13+\$E\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(A14)^2)			
15	=A14+\$E\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(A15)^2)			
16					
17	Результат	=E3*((B3+B15)/2+СУММ(B4:B14))			
18	R_n	=ABS(B17-I29)			

Рис. 14.

	A	B	C	D	E
1	Вычисление определенного интеграла методом трапеций при $n = 12$				
2	x	f(x)	a	b	h
3	0	1,0000	0	1,5708	0,1309
4	0,1309	0,9988			
5	0,2618	0,9952			
6	0,3927	0,9895			
7	0,5236	0,9820			
8	0,6545	0,9732			
9	0,7854	0,9636			
10	0,9163	0,9540			
11	1,0472	0,9449			
12	1,1781	0,9371			
13	1,3090	0,9310			
14	1,4399	0,9271			
15	1,5708	0,9258			
16					
17	Результат	1,51310			
18	R_n	2,22E-16			
19					

Рис. 15.

По аналогии получим результат вычисления интеграла при числе разбиений $n = 24$ (рис. 16).

	Н	И	Ж	К	Л
1	Вычисление определенного интеграла методом трапеций при $n = 24$				
2	x	$f(x)$	a	b	h
3	=J3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H3)^2)	0	=ПИ()/2	=(K3-J3)/24
4	=H3+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H4)^2)			
5	=H4+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H5)^2)			
6	=H5+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H6)^2)			
7	=H6+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H7)^2)			
8	=H7+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H8)^2)			
9	=H8+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H9)^2)			
10	=H9+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H10)^2)			
11	=H10+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H11)^2)			
12	=H11+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H12)^2)			
13	=H12+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H13)^2)			
14	=H13+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H14)^2)			
15	=H14+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H15)^2)			
16	=H15+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H16)^2)			
17	=H16+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H17)^2)			
18	=H17+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H18)^2)			
19	=H18+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H19)^2)			
20	=H19+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H20)^2)			
21	=H20+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H21)^2)			
22	=H21+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H22)^2)			
23	=H22+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H23)^2)			
24	=H23+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H24)^2)			
25	=H24+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H25)^2)			
26	=H25+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H26)^2)			
27	=H26+\$L\$3	=КОРЕНЬ(1-1/7*SIN(H27)^2)			
28					
29	Результат	=L3*(I3+I27)/2+СУММ(I4:I26)			

	Н	И	Ж	К	Л
Вычисление определенного интеграла методом трапеций при $n = 24$					
1	x	$f(x)$	a	b	h
2			0	1,0000	
3	0	1,0000	0	1,5708	0,0654
4	0,0654	0,9997			
5	0,1309	0,9988			
6	0,1963	0,9973			
7	0,2618	0,9952			
8	0,3272	0,9926			
9	0,3927	0,9895			
10	0,4581	0,9859			
11	0,5236	0,9820			
12	0,5890	0,9777			
13	0,6545	0,9732			
14	0,7199	0,9684			
15	0,7854	0,9636			
16	0,8508	0,9588			
17	0,9163	0,9540			
18	0,9817	0,9493			
19	1,0472	0,9449			
20	1,1126	0,9408			
21	1,1781	0,9371			
22	1,2435	0,9338			
23	1,3090	0,9310			
24	1,3744	0,9288			
25	1,4399	0,9271			
26	1,5053	0,9262			
27	1,5708	0,9258			
28					
29	Результат	1,51310			

Рис. 16.

Погрешность приближенного вычисления интеграла составит

$$R_n = |I_{2n} - I_n| = 2,22 \cdot 10^{-16}.$$

б) Приведем пример решения задачи в MathCad рис. 17.

Метод трапеций при $n = 12$ $f(x) := \sqrt{1 - \frac{1}{7} \cdot \sin(x)^2}$

$a := 0$ $b := \frac{\pi}{2}$ $n := 12$ $h := \frac{b-a}{n} = 0.1309$ $k := 0..12$ $x_k := a + k \cdot h$

$I_{тр12} := h \cdot \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right) = 1.5131$ - результат

Метод трапеций при $n = 24$

$n1 := 24$ $h1 := \frac{b-a}{n1} = 0.0654$ $k1 := 0..24$ $x_{k1} := a + k1 \cdot h1$

$I_{тр24} := h1 \cdot \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k1=1}^{n1-1} f(x_{k1}) \right) = 1.5131$ - результат

$Rn := |I_{тр12} - I_{тр24}| = 2.220446049250313 \times 10^{-16}$ погрешность вычисления

Рис. 17.

4.6. Формула парабол (Симпсона) приближенного вычисления определенных интегралов

Рассмотрим квадратурную формулу Ньютона-Котеса 2-го порядка для всего отрезка интегрирования $[a; b]$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

Поступая аналогично с формулой трапеций для каждого удвоенного частичного отрезка $[a; a + 2h]$, $[a + 2h; a + 4h]$ и т. д., получаем

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{b-a}{3n} (f(a) + 2[f(a + 2h) + f(a + 4h) + \dots + f(a + (2n - 2)h)] + \\ &+ 4[f(a + h) + f(a + 3h) + \dots + f(a + (2n - 1)h)] + f(b)) = \\ &= \frac{h}{3} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=2}^n f(a + (2k - 2)h) + 4 \sum_{k=1}^n f(a + (2k - 1)h) \right], \end{aligned}$$

где $h = (b - a) / 2n$;

n – число разбиений;

$k = \overline{1, n}$.

Данную приближённую формулу называют общей формулой Симпсона или формулой парабол, поскольку в основе ее образования лежит замена графика функции $f(x)$ на отрезке $[x_{2k-2}; x_{2k}]$ параболой, построенной по значениям $f(x_{2k-2})$, $f(x_{2k-1})$ и $f(x_{2k})$ рис. 18.

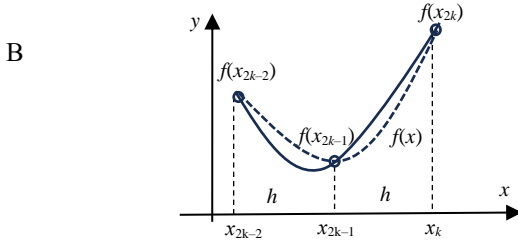


Рис.18.

Если подынтегральная функция трижды дифференцируемая, то погрешность формулы Симпсона можно оценить следующим образом

$$R_n \leq \frac{h^4}{12} \frac{n}{2} M_3 = \frac{(b-a)h^3}{192} M_3,$$

где $M_3 = \max_{x \in [a; b]} |f'''(x)|$.

Однако на практике для оценки погрешности формулы Симпсона пользуются методикой двойного пересчета значения интеграла

$$R_n = \frac{|I_{2n} - I_n|}{15}.$$

Пример. С помощью формулы Симпсона вычислить определенный интеграл $\int_0^1 e^{x^2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,0001$ в Excel и MathCad.

Решение.

а) Реализуем формулу парабол для интеграла $\int_0^1 e^{x^2} dx$ при числе разбиений $n = 4$. Для этого протабулируем подынтегральную функцию с

шагом $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 0,25$. Макет такой расчетной таблицы и результаты вычислений в Excel приведены на рис. 19.

	A	B	C	D	E
1	Вычисление определенного интеграла методом Симпсона при n = 4				
2	x	f(x)	a	b	h
3	=C3	=EXP(A3^2)	0	1	=(D3-C3)/4
4	=A3+\$E\$3	=EXP(A4^2)			
5	=A4+\$E\$3	=EXP(A5^2)			
6	=A5+\$E\$3	=EXP(A6^2)			
7	=A6+\$E\$3	=EXP(A7^2)			
8					
9	Результат	=E3/3*((B3+B7)+2*СУММ(B5)+4*СУММ(B4;B6))			
10					

	A	B	C	D	E
1	Вычисление определенного интеграла методом Симпсона при n = 4				
2	x	f(x)	a	b	h
3	0	1,0000	0	1,0000	0,2500
4	0,2500	1,0645			
5	0,5000	1,2840			
6	0,7500	1,7551			
7	1,0000	2,7183			
8					
9	Результат	1,46371			

Рис.19.

Тогда значение определенного интеграла при 4-х разбиениях отрезка интегрирования будет равно

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx \frac{0,25}{3} \cdot [f(0) + f(1) + 2 \cdot f(0,5) + 4 \cdot (f(0,25) + f(0,75))] =$$

$$= \frac{0,25}{3} \cdot [1 + 2,7183 + 2 \cdot 1,284 + 4 \cdot (1,0645 + 1,7551)] = 1,46371.$$

Аналогично реализуем формулу парабол для интеграла $\int_0^1 e^{x^2} dx$ при числе разбиений $2n = 8$. Для этого протабулируем подынтегральную функцию с шагом $h = \frac{b-a}{2n} = \frac{1-0}{8} = 0,125$. Макет такой расчетной таблицы в Excel и результаты вычислений приведены на рис. 20.

	G	H	I	J	K
1	Вычисление определенного интеграла методом трапеций при n = 8				
2	x	f(x)	a	b	h
3	=I3	=EXP(G3^2)	0	1	=(I3-I3)/8
4	=G3+\$K\$3	=EXP(G4^2)			
5	=G4+\$K\$3	=EXP(G5^2)			
6	=G5+\$K\$3	=EXP(G6^2)			
7	=G6+\$K\$3	=EXP(G7^2)			
8	=G7+\$K\$3	=EXP(G8^2)			
9	=G8+\$K\$3	=EXP(G9^2)			
10	=G9+\$K\$3	=EXP(G10^2)			
11	=G10+\$K\$3	=EXP(G11^2)			
12					
13	Результат	=K3/3*(H3+H11+2*СУММ(H5;H7;H9)+4*СУММ(H4;H6;H8;H10))			
14	R _n	=ABS(B9-H13)/15			

	G	H	I	J	K
1	Вычисление определенного интеграла методом трапеций при n = 8				
2	x	f(x)	a	b	h
3	0	1,0000	0	1,0000	0,1250
4	0,1250	1,0157			
5	0,2500	1,0645			
6	0,3750	1,1510			
7	0,5000	1,2840			
8	0,6250	1,4779			
9	0,7500	1,7551			
10	0,8750	2,1503			
11	1,0000	2,7183			
12					
13	Результат	1,46272			
14	R _n	0,00007			

Рис.20.

Тогда значение определенного интеграла при 8-и разбиениях отрезка интегрирования будет равно

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \approx \frac{0,125}{3} \cdot [f(0) + f(1) + 2 \cdot (f(0,25) + f(0,5) + f(0,75)) + 4 \cdot (f(0,125) + f(0,375) + f(0,625) + f(0,875))] = \frac{0,125}{3} \cdot [1 + 2,7183 + 2 \cdot (1,0645 + 1,284 + 1,7551) + 4 \cdot (1,0157 + 1,151 + 1,4779 + 1,7551)] = 1,46272.$$

Оценку погрешности приближенного вычисления заданного интеграла с одной значащей цифрой после запятой произведем по формуле

$$R_n = \frac{|I_{2n} - I_n|}{15} = \frac{|1,46272 - 1,46371|}{15} = 0,00007.$$

Так как $\varepsilon > R_n$, то необходимая точность приближенного вычисления значения интеграла достигнута.

б) Решение поставленной задачи в MathCad показано на рис. 21.

The screenshot shows the MathCad interface with the following content:

Method Simpson at $n = 4$ $f(x) := e^{x^2}$

$a := 0$ $b := 1$ $n := 2$ $h := \frac{b-a}{2n} = 0.25$ $k := 0..2n$ $x_k := a + k \cdot h$

$$I4 := \frac{h}{3} \left[f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{k=2}^n f[a + (2-k-2) \cdot h] + 4 \cdot \sum_{k=1}^n f[a + (2-k-1) \cdot h] \right] = 1.46371 \quad \text{- результат}$$

Method Simpson at $n = 8$

$n1 := 4$ $h1 := \frac{b-a}{2n1} = 0.125$ $k1 := 0..2n1$ $x_{k1} := a + k1 \cdot h1$

$$I8 := \frac{h1}{3} \left[f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{k1=2}^{n1} f[a + (2-k1-2) \cdot h1] + 4 \cdot \sum_{k1=1}^{n1} f[a + (2-k1-1) \cdot h1] \right] = 1.46272 \quad \text{- результат}$$

$Rn := \frac{|I4 - I8|}{15} = 0.00007$ - погрешность вычисления

Рис.21.

4.7. Формула Гаусса

Пусть необходимо вычислить определённый интеграл вида:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx$$

где $f(x)$ – имеет высокую степень гладкости на интервале $[-1; 1]$.

Данную задачу можно решить с помощью квадратурной формулы

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n C_k \cdot f(x_k).$$

Гауссом было доказано, что для достижения наивысшей точности результата интегрирования необходимо в качестве узлов квадратурной формулы взять корни многочлена Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

Коэффициенты C_k при этом вычисляются по формулам

$$C_k = \frac{2}{(1 - x_k^2) \cdot (P'_n(x_k))^2}.$$

Рассмотрим применение этих формул.

При $n = 1$ имеем одну узловую точку внутри отрезка $[-1; 1]$, которая определяется из уравнения

$$\frac{1}{2 \cdot 1!} \cdot \frac{d(x^2 - 1)}{dx} = 0.$$

Т.к. $(x^2 - 1)' = 2x$, то узловую точку находим из уравнения $x = 0$.

Отсюда $x_1 = 0$, $P'_n(x_1) = 1$, то $C_1 = \frac{2}{(1 - x_1^2)} = 2$.

При $n = 2$ получаем две узловые точки внутри отрезка $[-1; 1]$, которые определяются из уравнения

$$\frac{1}{2^2 \cdot 2!} \cdot \frac{d^2 (x^2 - 1)^2}{dx^2} = 0$$

Преобразовав его получаем

$$\frac{3}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} = 0.$$

Его решение $x_2 = -x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,5774$, а т.к. $((x^2 - 1)^2)''' = 3 \cdot x^2$, то общая

формула для вычисления квадратурных коэффициентов приобретает

$$\text{вид } C_k = \frac{2}{9 \cdot x^2 \cdot (1 - x_k^2)}.$$

Подставляя узловые точки, получаем:

$$\text{-- при } x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}; C_1 = \frac{2}{9 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)} = 1;$$

$$\text{-- при } C_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}; A_1 = \frac{2}{9 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)} = 1.$$

Для $n = \overline{3, 5}$ приведем таблицу узлов x_k и квадратурных коэффициентов C_k Гаусса без их вывода:

$$\text{-- при } n = 3, x_2 = 0, x_3 = -x_1 = \sqrt{\frac{3}{5}}, A_2 = \frac{8}{9}, A_1 = A_3 = \frac{5}{9};$$

$$\text{-- при } n = 4, x_3 = -x_2 = \frac{1}{35} \cdot \sqrt{15 - 2 \cdot \sqrt{15 \cdot \sqrt{2}} \cdot \sqrt{35}}, A_2 = A_3 \approx 0,652,$$

$$x_4 = -x_1 = \frac{1}{35} \cdot \sqrt{15 + 2 \cdot \sqrt{15 \cdot \sqrt{2}} \cdot \sqrt{35}}, A_1 = A_4 \approx 0,348;$$

$$\text{-- при } n = 5, x_3 = 0, x_4 = -x_2 = \frac{1}{21} \sqrt{35 - 2 \cdot \sqrt{35 \cdot \sqrt{2}} \cdot \sqrt{7}}, A_3 = 0,569,$$

$$A_2 = A_4 = 0,479;$$

$$x_5 = -x_1 = \frac{1}{21} \sqrt{35 + 2 \cdot \sqrt{35 \cdot \sqrt{2}} \cdot \sqrt{7}}, A_1 = A_5 \approx 0,24.$$

В случае произвольного интервала интегрирования $[a; b]$ (когда он не совпадает с отрезком $[-1; 1]$) предварительно делают замену переменной

$$x = \frac{b-a}{2} \cdot t + \frac{a+b}{2}$$

$$\int_a^b f(t) dt = \left. \begin{array}{l} t = \frac{b-a}{2} \cdot x + \frac{a+b}{2} \\ dt = \frac{b-a}{2} \cdot dx \\ x_1 = -1; x_2 = 1 \end{array} \right| = \frac{b-a}{2} \cdot \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2} \cdot x + \frac{a+b}{2}\right) dx.$$

А уже к преобразованному интегралу можно применить формулу Гаусса. Получим

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2} \cdot \sum_{k=1}^n C_k \cdot f(t_k) + R_n(f),$$

где $t_k = \frac{b-a}{2} \cdot x_k + \frac{a+b}{2}$;

x_k – узлы квадратурной формулы Гаусса;

C_k – соответствующие коэффициенты;

$R_n(f)$ – остаток квадратуры.

Остаток квадратурной формулы Гаусса определяется по формуле

$$R_n(f) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+1} \cdot \frac{2^{2n+1}}{(2n+1) \cdot (2n)!} \cdot \left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)^2 \cdot M_n$$

где $M_n = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(2n)}(x)|$.

Пример. По формуле Гаусса в MathCad вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$

при $n = 4$. Определить погрешность применяемой методики как абсолютную разность полученного результата интеграла и его значения, посчитанного в автоматическом режиме.

Решение.

Т. к. интервал интегрирования не совпадает с отрезком $[-1; 1]$, применим замену

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \left. \begin{array}{l} t = \frac{1-0}{2} \cdot x + \frac{1+0}{2}; \quad t = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ dt = \frac{1-0}{2} \cdot dx; \quad dt = \frac{1}{2} \cdot dx \\ x_1 = -1; \quad x_2 = 1 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 \frac{dx}{1 + \left(\frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= 2 \cdot \int_{-1}^1 \frac{dx}{4 + (x+1)^2}.$$

Применим формулу Гаусса в MathCad при числе разбиения $n = 4$ отрезка интегрирования $[-1; 1]$. Применение методики вычисления определенного интеграла в MathCad показано на рис. 22.

$n = 4$ $P(x, n) := \frac{1}{2^n \cdot n!} \left[\frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \right]$

$$P(x, n) \rightarrow 3 \cdot x^2 \cdot (x^2 - 1) + \frac{3 \cdot (x^2 - 1)^2}{8} + x^4 - 3 \cdot x^2 \cdot (x^2 - 1) + \frac{3 \cdot (x^2 - 1)^2}{8} + x^4 = X = \left(\begin{array}{l} \sqrt{\frac{2 \cdot \sqrt{30}}{35} + \frac{3}{7}} \\ -\sqrt{\frac{2 \cdot \sqrt{30}}{35} + \frac{3}{7}} \\ \sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2 \cdot \sqrt{30}}{35}} \\ -\sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2 \cdot \sqrt{30}}{35}} \end{array} \right)$$

$C(x) := \frac{2}{(1-x^2) \cdot \left(\frac{d}{dx} P(x, n) \right)^2} \rightarrow \frac{2}{\left[10 \cdot x^3 + \frac{15 \cdot x \cdot (x^2 - 1)^2}{2} \right] \cdot (x^2 - 1)}$

$k := 0, 1, n-1$

$$C(X_k) \rightarrow \left(\begin{array}{l} \frac{2}{\left(\frac{2 \cdot \sqrt{30}}{35} - \frac{4}{7} \right) \left[\frac{15 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \sqrt{30}}{35} + \frac{3}{7}} \cdot \left(\frac{2 \cdot \sqrt{30}}{35} - \frac{4}{7} \right)}{2} + 10 \cdot \left(\frac{2 \cdot \sqrt{30}}{35} + \frac{3}{7} \right)^{\frac{3}{2}} \right]^2} \\ \frac{2}{\left(\frac{2 \cdot \sqrt{30}}{35} - \frac{4}{7} \right) \left[\frac{15 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \sqrt{30}}{35} + \frac{3}{7}} \cdot \left(\frac{2 \cdot \sqrt{30}}{35} - \frac{4}{7} \right)}{2} + 10 \cdot \left(\frac{2 \cdot \sqrt{30}}{35} + \frac{3}{7} \right)^{\frac{3}{2}} \right]^2} \\ \frac{2}{\left(\frac{2 \cdot \sqrt{30}}{35} + \frac{4}{7} \right) \left[10 \cdot \left(\frac{3}{7} - \frac{2 \cdot \sqrt{30}}{35} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{15 \cdot \sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2 \cdot \sqrt{30}}{35}} \cdot \left(\frac{2 \cdot \sqrt{30}}{35} + \frac{4}{7} \right)}{2} \right]^2} \\ \frac{2}{\left(\frac{2 \cdot \sqrt{30}}{35} + \frac{4}{7} \right) \left[10 \cdot \left(\frac{3}{7} - \frac{2 \cdot \sqrt{30}}{35} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{15 \cdot \sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2 \cdot \sqrt{30}}{35}} \cdot \left(\frac{2 \cdot \sqrt{30}}{35} + \frac{4}{7} \right)}{2} \right]^2} \end{array} \right)$$

$a = -1$ $b = 1$ $f(x) := \frac{1}{4 + (x+1)^2}$

$\ln := 2 \cdot \frac{b-a}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (C(X_k) \cdot f(X_k)) = 0.785$ - результат по квадратурной формуле Гауса

$It = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = 0.785$ - результат в автоматическом режиме $|\ln - It| = 0.000005$; погрешность:

Рис.22.

4.8. Задания, рекомендуемые для аудиторных занятий

1. Используя встроенные возможности интегрирования в MathCad вычислить:

а) первообразные функций:

1) $5x^3 - \frac{4}{x^7} + \frac{9}{2\sqrt[3]{x^2}} - 17$; 2) $-\frac{4 \ln^8(x)}{5x}$; 3) $-6e^{-6x} \cdot \sin(4x+15)$;

б) неопределенные интегралы:

$$1) \int (4x^3 - \frac{7}{5x^7} + \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2})dx; \quad 2) \int x^4 \cos(6x^5 + 12); \quad 3) \int (3x-5)e^{4x+15} dx;$$

в) определенные интегралы:

$$1) \int_{-4,2}^{4,7} 3^{7x+2} dx; \quad 2) \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) dx; \quad 3) \int_{-0,95}^{2,56} x^3 e^{6x+4} dx;$$

г) несобственные интегралы:

$$1) \int_{2,98}^{\infty} \frac{50}{x^2} dx; \quad 2) \int_{-\infty}^{-6} \frac{\pi}{x^3} dx; \quad 3) \int_0^1 \operatorname{tg}(\frac{x}{2}) dx;$$

д) двойные интегралы по замкнутой области D :

$$1) \iint_D (2x-y) dx dy, \text{ если } D: \{0 \leq x \leq 3, y = -2x, y = x\};$$

$$2) \iint_D x^2 y dx dy, \text{ если } D: \{y = x, y = x^3\}.$$

2. Приблизленно вычислите определенный интеграл $\int_{-1}^3 (4x-2)^4 dx$

в Excel и MathCad по формулам Ньютона-Котеса 4-го порядка. Погрешность вычисления оценить, как разность между найденным значением интеграла и его значением, полученном в автоматическом режиме в MathCad;

3. Приблизленно вычислите определенный интеграл $\int_{-1,1}^{2,5} (6-2x)^7 dx$

в Excel и MathCad по формулам левых и правых прямоугольников при числе разбиений отрезка интегрирования, равном $n = 25$. Сравнить результаты вычислений. За результат интегрирования принять среднее арифметическое найденных значений;

4. По формуле трапеций в Excel и MathCad вычислить интеграл $\int_{0,1}^5 \ln(2x+1) dx$ при числе разбиений отрезка интегрирования, равном

$n = 15$. С помощью двойного пересчета результата интегрирования оценить его погрешность с одной значащей цифрой.

4. В Excel и MathCad найти значения определенного интеграла $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2-3} dx$ по формуле Симпсона с точностью $\varepsilon = 0,00005$.

5. В Excel и MathCad найти значения определенного интеграла $\int_{-2}^{-1} \frac{x}{x^2 + 3} dx$ по квадратурной формуле Гаусса при числе разбиений отрезка интегрирования, равном $n = 5$. Оценить погрешность вычислений методики, как абсолютную разность полученного результата интеграла и его значения, посчитанного в автоматическом режиме.

5. ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ ПО ТЕМЕ «ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ»

Приближенно вычислите определенный интеграл:

1) приняв $k = 1$, в MathCad по формулам Ньютона-Котеса 5-го порядка. Погрешность вычисления оценить, как разность между найденным значением интеграла и его значением, полученном в автоматическом режиме;

2) приняв $k = 2$, в Excel найти значения определенного интеграла по формулам левых и правых прямоугольников при числе разбиений отрезка интегрирования, равном $n = 15$. Сравнить результаты вычислений. За результат интегрирования принять среднее арифметическое найденных значений;

3) приняв $k = 3$, в Excel найти значения определенного интеграла по формуле трапеций при числе разбиений отрезка интегрирования, равном $n = 10$. С помощью двойного пересчета результата интегрирования для используемой формулы оценить его погрешность с одной значащей цифрой.

4) приняв $k = 4$, в MathCad найти значения определенного интеграла по формуле Симпсона с точностью $\varepsilon = 0,000005$.

5) приняв $k = 5$, в MathCad найти значения определенного интеграла по формуле Гаусса при числе разбиений отрезка интегрирования, равном $n = 4$. Для применения методики предварительно заменой переменной свести интеграл к отрезку интегрирования $[-1; 1]$. Оценить погрешность вычислений методики, как абсолютную разность полученного результата интеграла и его значения, посчитанного в автоматическом режиме.

$$1. \int_0^1 e^{-kx^2} dx; \quad 2. \int_2^4 e^{\frac{k}{x}} dx; \quad 3. \int_1^2 \frac{\sin(x)}{kx} dx; \quad 4. \int_0^1 \cos(kx^2) dx;$$

$$\begin{array}{llll}
5. \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-kx^2}}; & 6. \int_{15}^{30} \frac{\ln(x+1)}{kx+3} dx; & 7. \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\operatorname{arctg}(x)}{kx} dx; & 8. \int_1^2 x^{kx} dx; \\
9. \int_0^1 \frac{kx}{\ln(x+1)} dx; & 10. \int_{\frac{1}{5}}^1 e^{kx} \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx; & 11. \int_2^5 \frac{\ln(kx)}{1-x^2} dx; & 12. \int_2^3 \frac{kx dx}{\sqrt{x^2+2}}; \\
13. \int_0^1 x^3 e^{-kx^2} dx; & 14. \int_1^2 x^2 e^{\frac{k}{x}} dx; & 15. \int_1^2 \frac{\sin(kx)}{x} dx; & 16. \int_0^1 x \cos(kx^2) dx.
\end{array}$$